Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação — REASE

doi.org/10.51891/rease.v12i11.31837

# TEOREMA DE PICARD: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, APLICAÇÃO EM CIRCUITOS RL E POSSIBILIDADES PARA O ENSINO MÉDIO

**Karolain Korte**[1]
**Vando Narciso**[2]

ABSTRACT: This work aims to study Picard's Theorem based on concepts from metric spaces, Banach spaces, and the Banach Fixed Point Theorem, and to present an application to a series RL circuit. Initially, the concepts required to understand these results are presented. Then, Picard's Theorem is proved by relating the solution of an initial value problem to the fixed point of an operator. In the application, the physical principles of the RL circuit are introduced, and the mathematical model that describes the electric current in the circuit is developed. After verifying the continuity, Lipschitz, and boundedness conditions, Picard's Theorem guarantees the existence and uniqueness of a solution on a given interval. In a particular case, Picard iterations are used to obtain approximations for the electric current. Finally, possibilities for exploring this application in High School through calculations, tables, and graphs are presented, connecting Mathematics and Physics.

**Keywords:** Metric spaces. Banach Fixed Point Theorem. Picard's Theorem. RL circuit. High School.



## 1. INTRODUÇÃO

As equações diferenciais permitem representar fenômenos em que uma grandeza varia ao longo do tempo, como ocorre com a corrente elétrica em um circuito. Ao utilizar essas equações na construção de um modelo matemático, é importante verificar se existe uma solução que satisfaça a condição inicial considerada e se essa solução é única. O Teorema de Picard estabelece condições que garantem essas propriedades, e sua demonstração apresenta um processo de aproximações sucessivas para obter a solução.

Este artigo tem como objetivo estudar o Teorema de Picard e apresentar sua aplicação a um circuito RL em série, formado por um resistor e um indutor. Para isso, são retomados conceitos de espaços métricos completos, que fornecem a base para o estudo do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Com base nesse resultado, a resolução de um problema de valor inicial é relacionada à determinação do ponto fixo de um operador, definido por uma integral.

[1]Licenciatura em Matemática - cursando Mestrado Profissionalizante em Matemática (PROFMAT). Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS).
[2]Orientador. professor Doutorado em Matemática, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS).

O estudo é desenvolvido por meio de uma abordagem bibliográfica e da análise matemática do modelo considerado. Inicialmente, são apresentados os fundamentos necessários à demonstração do Teorema de Picard. Em seguida, a partir das relações físicas que descrevem o circuito RL, é construído o problema de valor inicial e são verificadas as hipóteses do teorema. No estudo de um caso particular, são calculadas as quatro primeiras iterações de Picard, a fim de comparar as aproximações obtidas para a corrente elétrica em um mesmo instante.

A aplicação também permite discutir possibilidades de exploração no Ensino Médio. As expressões polinomiais obtidas nas iterações podem ser apresentadas aos estudantes e utilizadas em cálculos numéricos, tabelas e gráficos, de forma que seja possível observar e comparar as aproximações. Essa proposta relaciona conteúdos de Matemática e Física e oferece uma situação concreta para o estudo de funções e de seus valores numéricos, sem exigir dos estudantes o desenvolvimento formal das equações diferenciais.

Dessa forma, o artigo reúne a fundamentação matemática do Teorema de Picard, sua aplicação ao circuito RL e possibilidades de abordagem do exemplo no Ensino Médio. A discussão educacional tem caráter propositivo, sem realização de uma intervenção em sala de aula.



## 2. Fundamentação teórica

Para compreender o Teorema de Picard e sua aplicação na existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, é necessário apresentar alguns conceitos que fundamentam sua demonstração. Inicialmente, serão abordados os espaços métricos e a noção de completude. Em seguida, serão apresentados os conceitos de contração e ponto fixo, culminando no Teorema do Ponto Fixo de Banach, que fornece a base para a demonstração do Teorema de Picard. Os resultados enunciados abaixo podem ser encontrados na teoria clássica, contida nas seguintes referências: *Espaços Métricos – Elon Lages Lima; Lições de Equações Diferenciais Ordinárias – Jorge Sotomayor; Fundamentos de Física – Halliday & Resnick.*

### 2.1 Espaços métricos e espaços métricos completos

Um espaço métrico é um conjunto no qual é possível estabelecer uma noção de distância entre seus elementos. Formalmente, seja $X$ um conjunto não vazio. Uma função

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é denominada **métrica** em $X$ quando, para quaisquer $x, y, z \in X$, são satisfeitas as seguintes propriedades:

$d_1)$ $d(x,y) \geq 0$;
$d_2)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
$d_3)$ $d(x,y) = d(y,x)$;
$d_4)$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Nesse caso, o par $(X,d)$ é denominado **espaço métrico**.

Para o desenvolvimento dos resultados seguintes, também é importante considerar a noção de completude. Uma sequência $(x_n)$ em um espaço métrico $(X,d)$ é denominada **sequência de Cauchy** quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

para quaisquer $m, n \geq n_0$.

Um espaço métrico $(X,d)$ é chamado **completo** quando toda sequência de Cauchy em $X$ converge para um elemento pertencente ao próprio espaço $X$.



Um exemplo importante é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, munido da métrica usual

$$d(x,y) = ||x - y||.$$

Esse espaço é completo, pois toda sequência de Cauchy de números reais converge para um elemento de $\mathbb{R}$.

De forma semelhante, o espaço $\mathbb{R}^n$, munido da métrica induzida pela norma euclidiana,

$$d(x,y) = ||x - y||,$$

também é um espaço métrico completo.

A completude será uma propriedade essencial para os resultados apresentados a seguir, visto que o Teorema do Ponto Fixo de Banach garante a existência de um único ponto fixo para uma contração definida em um espaço métrico completo. Esse resultado será posteriormente utilizado na demonstração do Teorema de Picard.

## 2.2 Contrações e o Teorema do Ponto Fixo de Banach

Antes de apresentar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, é necessário definir o conceito de contração. Seja $(X, d)$ um espaço métrico. Uma aplicação $F: X \to X$ é denominada contração se existe uma constante $K$, com $0 \leq K < 1$, tal que

$$d\big(F(x), F(y)\big) \leq K.\, d(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in X$.

Essa condição indica que a aplicação $F$ aproxima os pontos do espaço, visto que a distância entre $F(x)$ e $F(y)$ é menor ou igual à distância entre $x$ e $y$, multiplicada por uma constante menor que 1.

Outro conceito necessário é o de ponto fixo. Um elemento $p \in X$ é denominado ponto fixo de uma aplicação $F: X \to X$ quando

$$F(p) = p.$$

O Teorema do Ponto Fixo de Banach estabelece condições que garantem não apenas a existência de um ponto fixo, mas também sua unicidade.

Teorema - Ponto Fixo de Banach. *(LEMA DE CONTRAÇÃO, p. 12)* Seja $(X, d)$ um espaço métrico completo e $F: X \to X$ uma contração, isto é,

$$d\big(F(x), F(y)\big) \leq K.\, d(x, y), \qquad 0 \leq K < 1.$$

Então existe um único ponto $p \in X$ tal que

$$F(p) = p.$$

Além disso, para qualquer $x_0 \in X$, a sequência definida iterativamente por

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

converge para $p$.

A importância desse resultado está no fato de que, além de garantir a existência e a unicidade do ponto fixo, o teorema fornece um processo iterativo para obtê-lo. Partindo de um elemento inicial $x_0$, são construídas sucessivamente as aproximações

$$x_1 = F(x_0), \quad x_2 = F(x_1), \quad x_3 = F(x_2), \ldots,$$

que convergem para o único ponto fixo da aplicação.

*Demonstração:* Considere $x_0 \in X$ e defina a sequência $(x_n)$ por

$$x_{n+1} = F(x_n), \qquad n \geq 0.$$

Como $F$ é uma contração, tem-se

$$d(x_{n+1}, x_n) = d\big(F(x_n), F(x_{n-1})\big) \leq K.\, d(x_n, x_{n-1}).$$

Aplicando sucessivamente essa desigualdade, obtém-se

$$d(x_{n+1}, x_n) = K^n . d(x_1, x_0).$$

Agora, sejam $m > n$. Pela desigualdade triangular,

$$d(x_m, x_n) \leq (K^{m-1} + K^{m-2} + \cdots + K^n) . d(x_1, x_0).$$

Como $0 \leq K < 1$, segue que

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{K^n}{1-K} . d(x_1, x_0).$$

Quando $n \to \infty$, o lado direito da desigualdade tende a zero. Portanto, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. Como $X$ é completo, existe $p \in X$ tal que

$$x_n \to p.$$

Resta mostrar que $p$ é um ponto fixo de $F$. Como $F$ é uma contração,

$$d(F(p), p) \leq d\big(F(p), F(x_n)\big) + d(F(x_n), p).$$

Assim,

$$d(F(p), p) \leq K . d(p, x_n) + K . d(x_{n+1}, p).$$

Como $x_n \to p$, também $x_{n+1} \to p$. Fazendo $n \to \infty$, obtém-se

$$d(F(p), p) = 0,$$

e, portanto,

$$F(p) = p.$$



Para verificar a unicidade, suponha que exista outro ponto fixo $q \in X$. Então,

$$d(p, q) = d\big(F(p), F(q)\big) \leq K . d(p, q).$$

Como $0 \leq K < 1$, essa desigualdade somente pode ocorrer se

$$d(p, q) = 0,$$

o que implica $p = q$. Portanto, $F$ possui um único ponto fixo e, como a sequência $(x_n)$ converge para $p$ para qualquer $x_0 \in X$, esse ponto é atrator de $F$.

Corolário. (COROLÁRIO, p. 13) Seja $X$ um espaço métrico completo e $F: X \to X$ contínua. Se, para algum $m \in \mathbb{N}$, $F^m$ é uma contração, então $F$ possui um único ponto fixo.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach fornece a base para o estudo do Teorema de Picard, uma vez que permite relacionar a solução de um problema de valor inicial à existência de um ponto fixo de um operador adequado. A partir dessa relação, é possível estabelecer condições que garantem a existência e a unicidade da solução de determinadas equações diferenciais ordinárias.

### 2.3 Teorema de Picard

Considere o problema de valor inicial

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

O Teorema de Picard estabelece condições que garantem a existência e a unicidade de uma solução para esse problema em um intervalo contendo $t_0$. Sua demonstração utiliza o Teorema do Ponto Fixo de Banach, apresentado anteriormente, a partir da transformação da equação diferencial em uma equação integral.

De fato, supondo que $x$ seja uma solução do problema e integrando a equação

$$x'(t) = f(t,x(t))$$

entre $t_0$ e $t$, obtém-se

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\big(s,x(s)\big)ds.$$

Como $x(t_0) = x_0$, segue que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s,x(s)\big)ds.$$

Dessa forma, encontrar uma solução para o problema de valor inicial equivale a encontrar uma função $x$ que satisfaça essa equação integral. Para isso, define-se o operador

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s,x(s)\big)ds.$$



Assim, uma função $x$ será solução do problema de valor inicial quando

$$T(x) = x,$$

isto é, quando $x$ for um ponto fixo do operador $T$. Essa relação permite utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para estabelecer a existência e a unicidade da solução.

Teorema. (TEOREMA DE PICARD, p. 13) Seja $f$ contínua e lipschitziana em

$$\Omega = I_a \times B_b,$$

onde

$$I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$$

e

$$B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq b\}.$$

Suponha que exista $M > 0$ tal que

$$|f(t,x)| \leq M$$

para todo $(t,x) \in \Omega$. Então o problema de valor inicial

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

possui uma única solução em

$$I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq \alpha\},$$

onde

$$\alpha = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

*Demonstração.* Como vimos anteriormente, resolver o problema de valor inicial equivale a encontrar uma função $x$ que satisfaça

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds.$$

Considere o espaço

$$X = C(I_\alpha;\ B_b),$$

formado pelas funções contínuas $\varphi: I_\alpha \to B_b$, munido da métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup|\varphi_1(t) - \ \varphi_2(t)|.$$

Como $B_b$ é fechado em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ é completo, $B_b$ também é completo.

Consequentemente, $X$, com a métrica uniforme, é um espaço métrico completo.

Define-se o operador $F: X \to X$ por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \varphi(s)\big)ds.$$



Primeiramente, é necessário verificar que $F(\varphi)$ pertence a $X$. Como $|f(t,x)| \leq M$, tem-se

$$|F(\varphi)(t) - x_0| \leq \left|\int_{t_0}^{t} f\big(s, \varphi(s)\big)ds\right| \leq M|t - t_0|.$$

Como $t \in I_\alpha$,

$$|t - t_0| \leq \alpha \leq \frac{b}{M},$$

e, portanto,

$$|F(\varphi)(t) - x_0| \leq M\alpha \leq b.$$

Logo, $F(\varphi)(t) \in B_b$, mostrando que $F$ está bem definido em $X$.

Como $f$ é lipschitziana em relação à segunda variável, existe $K > 0$ tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x - y|.$$

Assim, para $\varphi_1, \varphi_2 \in X$,

$$|F(\varphi_1)(t) - F(\varphi_2)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds$$
$$\leq K|t - t_0| d(\varphi_1, \varphi_2)$$
$$\leq K\alpha d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Entretanto, não necessariamente $K\alpha < 1$. Por esse motivo, considera-se uma potência adequada do operador $F$. Repetindo a estimativa anterior, obtém-se, para todo $m \geq 1$,

$$d(F^m(\varphi_1), F^m(\varphi_2)) \leq \frac{(K\alpha)^m}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Como

$$\frac{(K\alpha)^m}{m!} \longrightarrow 0$$

quando $m \longrightarrow \infty$, existe $m$ suficientemente grande tal que

$$\frac{(K\alpha)^m}{m!} < 1.$$

Portanto, $F^m$ é uma contração. Pelo corolário do Teorema do Ponto Fixo de Banach, $F$ possui um único ponto fixo $x \in X$. Assim,

$$F(x) = x,$$

isto é,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds.$$

Derivando essa igualdade, obtém-se

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

e, para $t = t_0$,

$$x(t_0) = x_0.$$

Portanto, $x$ é a única solução do problema de valor inicial em $I_\alpha$.



## 3. Aplicação do Teorema de Picard a um circuito RL

Nesta seção, será apresentada uma aplicação do Teorema de Picard a um circuito RL em série. A partir das relações físicas que descrevem o circuito, será construído um problema de valor inicial e, em seguida, serão verificadas as condições necessárias para garantir a existência e a unicidade de sua solução.

### 3.1 Circuito RL em série e modelagem matemática

Um circuito RL em série é formado por um resistor e um indutor ligados em uma mesma malha. Por estarem associados em série, a mesma corrente elétrica $i(t)$ percorre os dois componentes. O resistor, caracterizado pela resistência $R$, está associado à dissipação de energia elétrica, enquanto o indutor, caracterizado pela indutância $L$, armazena energia em seu campo magnético.

As diferenças de potencial associadas ao resistor e ao indutor são dadas, respectivamente, por

$$V_R(t) = Ri(t)$$

e

$$V_L(t) = L\frac{di}{dt} = Li'(t).$$

Considerando uma tensão externa $E(t)$ aplicada ao circuito, utiliza-se a Lei das Tensões de Kirchhoff, segundo a qual a tensão fornecida pela fonte é igual à soma das quedas de tensão nos componentes da malha. Assim,

$$E(t) = Ri(t) + Li'(t),$$

ou, equivalentemente,

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t).$$



Essa equação diferencial ordinária de primeira ordem descreve a evolução da corrente elétrica $i(t)$ no circuito $RL$. Como $L > 0$, dividindo a equação por $L$, tem-se

$$i'(t) = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{E(t)}{L}.$$

Para determinar o comportamento da corrente ao longo do tempo, considera-se ainda uma condição inicial

$$i(t_0) = i_0,$$

em que $i_0$ representa o valor da corrente elétrica no instante inicial $t_0$. Dessa forma, o comportamento da corrente no circuito é descrito pelo problema de valor inicial

$$\begin{cases} i'(t) = -\dfrac{R}{L}i(t) + \dfrac{E(t)}{L}, \\ i(t_0) = i_0. \end{cases}$$

A partir desse problema, pode-se definir

$$f(t, i) = -\frac{R}{L}i + \frac{E(t)}{L}$$

e verificar as condições estabelecidas pelo Teorema de Picard para garantir a existência e a unicidade da solução.

### 3.2 Aplicação do Teorema de Picard

Considerando o problema de valor inicial obtido anteriormente,

$$\begin{cases} i'(t) = -\dfrac{R}{L}i(t) + \dfrac{E(t)}{L}, \\ i(t_0) = i_0, \end{cases}$$

define-se

$$f(t,i) = -\frac{R}{L}i + \frac{E(t)}{L}.$$

Suponha que $R > 0$ e $L > 0$ sejam constantes e que a tensão aplicada $E(t)$ seja contínua. Para aplicar o Teorema de Picard, verificam-se as condições de continuidade, de Lipschitz e de limitação da função $f$.

Continuidade. Como $R$ e $L$ são constantes, a função

$$-\frac{R}{L}i$$

é contínua em relação a $i$. Além disso, sendo $E(t)$ contínua, a função

$$\frac{E(t)}{L}$$

também é contínua. Portanto,

$$f(t,i) = -\frac{R}{L}i + \frac{E(t)}{L}$$

é contínua em $\Omega$.

Condição de Lipschitz. Sejam $i_1, i_2 \in B_b$. Então,

$$|f(t,i_1) - f(t,i_2)| = \left| -\frac{R}{L}i_1 + \frac{E(t)}{L} + \frac{R}{L}i_2 - \frac{E(t)}{L} \right|$$

$$= \left| -\frac{R}{L}(i_1 - i_2) \right|$$

$$= \frac{R}{L}|i_1 - i_2|.$$

Assim, tomando

$$K = \frac{R}{L},$$

obtém-se

$$|f(t,i_1) - f(t,i_2)| \leq K|i_1 - i_2|.$$

Logo, $f$ é lipschitziana em relação à variável $i$.

Limitação. Resta verificar que existe $M > 0$ tal que

$$|f(t,i)| \leq M$$

para todo $(t,i) \in \Omega$. Como $E(t)$ é contínua em um intervalo fechado e limitado, ela é limitada. Assim, pode-se definir

$$E_\alpha = \max|E(t)|.$$

Além disso, para $i \in B_b$,

$$|i - i_0| \leq b.$$

Pela desigualdade triangular,

$$|i| = |i - i_0 + i_0| \leq |i - i_0| + |i_0| \leq b + |i_0|.$$

Portanto,

$$|f(t,i)| = \left|-\frac{R}{L}i + \frac{E(t)}{L}\right|$$
$$\leq \frac{R}{L}|i| + \frac{|E(t)|}{L}$$
$$\leq \frac{R}{L}(|i_0| + b) + \frac{E_\alpha}{L}.$$

Dessa forma, pode-se tomar

$$M = \frac{R}{L}(|i_0| + b) + \frac{E_\alpha}{L},$$

garantindo que

$$|f(t,i)| \leq M$$

em $\Omega$.

Portanto, a função

$$f(t,i) = -\frac{R}{L}i + \frac{E(t)}{L}$$

é contínua, lipschitziana em relação à variável $i$ e limitada em $\Omega$. Assim, estão satisfeitas as hipóteses do Teorema de Picard e, consequentemente, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} i'(t) = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{E(t)}{L}, \\ i(t_0) = i_0 \end{cases}$$

possui uma única solução, ao menos no intervalo $I_\alpha$, com

$$\alpha = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Dessa forma, conhecidos os valores da resistência $R$, da indutância $L$, da tensão aplicada $E(t)$ e da corrente inicial $i_0$, o Teorema de Picard garante a existência de uma única função $i(t)$, no intervalo considerado, que satisfaz o modelo matemático do circuito.

### 3.3 Estudo de um caso particular

Após verificar que o Teorema de Picard pode ser aplicado ao modelo matemático do circuito $RL$, considera-se um caso particular com o objetivo de observar como as iterações de Picard fornecem aproximações para a corrente elétrica.

Considere um circuito $RL$ em série com resistência $R = 10\Omega$, indutância $L = 2H$ e submetido a uma tensão constante $E(t) = 20V$. Suponha ainda que, no instante inicial $t_0 = 0$, a corrente elétrica seja nula, isto é, $i(0) = 0$.

Substituindo esses valores na equação

$$\begin{gathered} Li'(t) + Ri(t) = E(t) \\ \Rightarrow 2i'(t) + 10i(t) = 20 \\ \Rightarrow i'(t) = -5i(t) + 10 \end{gathered}$$

Assim, o problema de valor inicial considerado é

$$\begin{cases} i'(t) = -5i(t) + 10, \\ i(0) = 0. \end{cases}$$

Para aplicar o processo de aproximações sucessivas de Picard, escreve-se o problema na forma integral:

$$i(t) = \int_0^t [-5i(s) + 10]ds.$$

Partindo da aproximação inicial $i_0(t) = 0$, define-se, para $n \geq 0$,

$$i_{n+1}(t) = \int_0^t [-5i(s) + 10]ds.$$

As primeiras iterações são obtidas substituindo sucessivamente cada aproximação na expressão anterior.

**Primeira iteração:**

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \int_0^t [-5i_0(s) + 10]ds \\ &= \int_0^t 10\, ds \\ &= 10t. \end{aligned}$$

**Segunda iteração:**

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \int_0^t [-5i_1(s) + 1 -]ds \\ &= \int_0^t [-50s + 10]ds \end{aligned}$$

$$= 10t - 25t^2.$$

**Terceira iteração:**

$$i_3(t) = \int_0^t [-5i_2(s) + 10]ds$$
$$= \int_0^t [-5(10s - 25s^2) + 10]ds$$
$$= \int_0^t (10 - 50s + 125s^2)ds$$
$$= 10t - 25t^2 + \frac{125}{3}t^3.$$

**Quarta iteração:**

$$i_4(t) = \int_0^t [-5i_3(s) + 10]ds$$
$$= \int_0^t \left(10 - 50s + 125s^2 - \frac{625}{3}s^3\right)ds$$
$$= 10t - 25t^2 + \frac{125}{3}t^3 - \frac{625}{12}t^4.$$

Para observar o comportamento das aproximações obtidas, considera-se o instante $t = 0{,}1\ s$. Substituindo esse valor nas quatro primeiras iterações, tem-se

$$i_1(0{,}1) = 10(0{,}1) = 1$$
$$i_2(0{,}1) = 10(0{,}1) - 25(0{,}1)^2 = 0{,}75$$
$$i_3(0{,}1) = 10(0{,}1) - 25(0{,}1)^2 + \frac{125}{3}(0{,}1)^3 \approx 0{,}7917$$
$$i_4(0{,}1) = 10(0{,}1) - 25(0{,}1)^2 + \frac{125}{3}(0{,}1)^3 - \frac{625}{12}(0{,}1)^4 \approx 0{,}7865$$



Os resultados podem ser organizados na tabela a seguir:

| Aproximação | Expressão | $i_n(0{,}1)$ |
|---|---|---|
| $i_1$ | $10t$ | 1,0000 |
| $i_2$ | $10t - 25t^2$ | 0,7500 |
| $i_3$ | $10t - 25t^2 + \frac{125}{3}t^3$ | 0,7917 |
| $i_4$ | $10t - 25t^2 + \frac{125}{3}t^3 - \frac{625}{12}t^4$ | 0,7865 |

Observa-se que as aproximações apresentam valores cada vez mais próximos entre si. Esse comportamento está relacionado ao processo iterativo de Picard, no qual as funções obtidas sucessivamente aproximam a solução do problema de valor inicial.

### 3.4 Possibilidades de abordagem no Ensino Médio

Embora o estudo formal das equações diferenciais ordinárias e do Teorema de Picard não faça parte dos conteúdos usualmente abordados no Ensino Médio, a aplicação apresentada pode ser explorada a partir de conceitos matemáticos já acessíveis aos estudantes. Nesse caso, o objetivo não seria desenvolver a teoria que fundamenta as aproximações, mas utilizar as expressões obtidas para trabalhar conteúdos de Matemática em uma situação relacionada à Física.

No caso particular considerado, as iterações de Picard forneceram as funções

$$i_1(t) = 10t$$
$$i_2(t) = 10t - 25t^2$$
$$i_3(t) = 10t - 25t^2 + \frac{125}{3}t^3$$
$$i_4(t) = 10t - 25t^2 + \frac{125}{3}t^3 - \frac{625}{12}t^4$$

Essas expressões podem ser apresentadas aos estudantes como funções que fornecem aproximações para a corrente elétrica em diferentes instantes. A partir delas, é possível calcular valores numéricos, organizar os resultados em tabelas e construir representações gráficas, permitindo comparar o comportamento das diferentes aproximações.



Por exemplo, considerando $t = 0{,}1\ s$, obtêm-se os valores: $i_1(0{,}1) = 1$, $i_2(0{,}1) = 0{,}75$, $i_3(0{,}1) \approx 0{,}7917$ e $i_4(0{,}1) \approx 0{,}7865$.

A comparação desses resultados permite observar que as aproximações sucessivas apresentam valores cada vez mais próximos entre si. Dessa forma, pode-se explorar intuitivamente a ideia de aproximação, sem a necessidade de apresentar aos estudantes a fundamentação teórica do método de Picard.

Além dos cálculos numéricos, as funções podem ser representadas graficamente em um mesmo plano cartesiano, possibilitando observar como seus gráficos se aproximam no intervalo considerado. Essa abordagem permite trabalhar conceitos relacionados a funções polinomiais, valor numérico de uma função, construção e interpretação de tabelas e análise gráfica.

A atividade também possibilita estabelecer uma relação entre Matemática e Física, uma vez que as funções analisadas representam aproximações para a corrente elétrica em um circuito. Assim, os estudantes podem perceber que conceitos matemáticos estudados em sala de aula podem ser utilizados na descrição e na análise de fenômenos físicos.

A proposta apresentada possui caráter exploratório e não pretende introduzir formalmente o estudo das equações diferenciais no Ensino Médio. Busca-se utilizar uma aplicação proveniente de um conteúdo matemático mais avançado como ponto de partida para explorar conceitos compatíveis com esse nível de ensino, favorecendo a interpretação de funções, a realização de cálculos e a análise de diferentes formas de representação matemática.

## 4. CONCLUSÃO

Este artigo teve como objetivo estudar o Teorema de Picard e apresentar uma aplicação a um circuito RL em série. Para isso, foram retomados conceitos de espaços métricos completos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que forneceram a base para compreender a existência e a unicidade de soluções de determinados problemas de valor inicial.

A partir das relações físicas do circuito RL, foi construído o modelo matemático que descreve a variação da corrente elétrica ao longo do tempo. A verificação das condições de continuidade, de Lipschitz e de limitação permitiu aplicar o Teorema de Picard e garantir a existência e a unicidade da solução do problema considerado.

No estudo de um caso particular, as iterações de Picard permitiram obter aproximações sucessivas para a corrente elétrica. A comparação dos valores encontrados mostrou como o processo iterativo pode aproximar a solução do problema, estabelecendo uma relação entre os resultados teóricos apresentados e sua aplicação.



Além disso, as expressões obtidas nas iterações permitem explorar conteúdos acessíveis aos estudantes do Ensino Médio, como funções polinomiais, valores numéricos, tabelas e gráficos. Dessa forma, a aplicação possibilita relacionar conteúdos de Matemática e Física sem exigir o desenvolvimento formal das equações diferenciais ou do Teorema de Picard nesse nível de ensino.

Assim, o estudo evidencia que resultados matemáticos desenvolvidos em um contexto mais abstrato podem contribuir para a análise de situações concretas e também fornecer possibilidades de abordagem de conceitos matemáticos na Educação Básica.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), pelo apoio financeiro concedido por meio do Programa Institucional de Bolsa de Estudo a Alunos de Pós-Graduação (PIBAP), e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo financiamento por meio da bolsa CAPES-PROFMAT, processo nº 88887.3302887/2026-00.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de física*. 9. ed. v. 3: Eletromagnetismo. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.

SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. *Equações Diferenciais e Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

LIMA, Elon Lages. *Análise Real*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.