doi.org/10.51891/rease.v9i5.9604

RECURSOS LÚDICOS E SOFTWARES COM FOCO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Antônio Rogério Chaves de Souza[1]
Theresa Christine Filgueiras Russo Aragão[2]

RESUMO: Análise Combinatória e Probabilidade são ciências vastamente aplicadas no cotidiano das pessoas. Censos e estatística de tendência, utilizada para comunicar matematicamente o movimento de um problema no mundo (como foi o caso do movimento da pandemia por Covid19) são exemplos dessa aplicabilidade. Pesquisas na área da Matemática têm revelado que o estudante do Ensino Médio enfrenta muitas dificuldades para interpretar e usar fórmula em problemas propostos no ENEM e que necessitam da Análise Combinatória e da Probabilidade. Na Biologia, por exemplo, mais especificamente sobre os mecanismos das Leis de Mendel, um assunto bastante explorado no ENEM, a Análise Combinatória e a Probabilidade têm papel fundamental. Na forma de movimento criativo para colaborar com o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória e Probabilidade, muitos softwares foram desenvolvidos por especialistas em Tecnologia de Informação (TI) como é o caso do "COMBINA" e do "GeoGebra", softwares experienciados elos autores do presente artigo. Ainda, o MEC disponibiliza uma lista de programas e ferramentas didáticas contexto do ensino e da aprendizagem da Análise Combinatória. O recurso didático "A Cartomante" foi selecionado para uma maior discussão no presente artigo. Em conjunção com esses elementos TI colaborativos, professores e professoras de matemática têm desenvolvido metodologias lúdicas para mitigar as dificuldades que seus alunos(as) enfrentam para solucionar problemas de Análise Combinatória e Probabilidade. A partir dessa perspectiva, o presente trabalho buscou alcançar os seguintes objetivos: selecionar e apresentar ferramentas TI colaborativas na melhoraria do ensino e da aprendizagem da Análise Combinatória e Probabilidade; desenvolver metodologias lúdicas na forma de brincadeiras com baralho, dados e moedas visando melhorar a forma de ensinar os referidos conteúdos de matemática para o público do Ensino Médio. Os softwares "COMBINA" e "GEOGEBRA" foram selecionados e experimentados. Observações, análises, diagnósticos foram realizados. Concluiu-se que os recursos experienciados são ricos em informação e em exercícios. O acesso online e a linguagem dos jogos é bastante acessível. Concluiu-se que os recursos didáticos vivenciados pelos autores/professores são potentes meios de mitigar dificuldades do estudante do Ensino Médio em Análise Combinatória e Probabilidade. Entretanto ressalta-se o papel do professor na orientação do uso desses recursos como necessária.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Probabilidade. Jogos lúdicos. Combina. Geogebra. Enem.

INTRODUÇÃO

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo que auxilia na estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo. Trata-se de uma ciência que tem

[1]Professor de Matemática da rede estadual de escola pública do Ceará. Governo do Estado do Ceará. Doutor em Ciências da Educação pela Universidad Del Sol em Fortaleza, Ceará.
[2] Professora de Metodologia Científica e Estatística aplicada da Universidad Del Sol em Fortaleza, Ceará. Doutora em Bioquímica e Biologia Molecular pela Universidade Federal do Ceará. Professora aposentada do Centro de Ciências da Saúde da Universidade Estadual do Ceará.

função instrumental na forma de ferramenta que se usa cotidianamente. Além disso, contribui no desenvolvimento do pensar, alcançando espaços extras que geram no estudante habilidades e capacidades de solucionar problemas. No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo estudante como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento (MEC, 2020).

Por ocupar uma posição muito singular devido à universalidade de quantificação e da linguagem, a Matemática tece diálogos com a música, informática, comércio, meteorologia, biologia, química, física, medicina, cartografia, engenharia e comunicação, entre outros. Neste vasto Universo, a Matemática se constitui como ferramenta insubstituível que codifica, ordena, quantifica e interpreta compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e outras variáveis (MEC, 2020).

Insere-se aqui, como forma de referenciar os diálogos que a Matemática tece com outras ciências, a importância da Análise Combinatória e da Probabilidade no ensino da Biologia já que esses conteúdos matemáticos são ferramentas imprescindíveis para entender as Leis de Mendel e solucionar problemas de Genética Clássica. No Ensino Médio, problemas de genética são muitas vezes mal interpretados e mal solucionados por déficit de conhecimento do(a) aluno(a) em Probabilidade e Análise Combinatória.

A análise combinatória está associada com o processo de contagem. Dessa forma, estudar e exercitar essa ferramenta matemática auxilia na melhor compreensão de contagens de maneira mais eficiente. O estudo da probabilidade está intimamente relacionado com o estudo da análise combinatória (BRASIL ESCOLA, 2022).

Recursos didáticos tecnológicos para ensinar e aprender Análise Combinatória e Probabilidade

Tecnologias de Informação (TI) têm promovido fortes impactos sobre a Educação, principalmente no contexto do Ensino Médio. Hoje, uma variedade de softwares educativos está disponibilizada no formato online (muitos deles gratuitos) para colaborar com o ensino e aprendizagem de inúmeras ciências como é o caso da Matemática.

Os pesquisadores Löbler,Visentini, Corso e Santos (2010) verificaram que o uso das TI refletem de forma positiva no aprendizado, fato que pode ser mensurado e visualizado pela performance dos estudantes no ENEM, incluindo os das escolas públicas. No trabalho dos referidos autores foi observado que houve um maior desempenho no ENEM em relação aos estudantes que têm acesso às TI de maneira mais ampla, contrastando significativamente com estudantes de escolas públicas com baixa inclusão digital. Dessa forma ficou evidenciado que as escolas de maior desempenho geral no Exame ENEM incentivam mais os seus alunos(as) a utilizar a TI, oferecendo recursos tecnológicos em função da melhoria do aprendizado.

No contexto do ensino e da aprendizagem da Análise Combinatória, uma lista de programas e ferramentas didáticas online está disponível no site do MEC (http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaColecao.html?id=3460). Essa lista consiste em uma coleção que engloba recursos educacionais que abordam conteúdos relacionados à contagem, desde o princípio fundamental da contagem até técnicas específicas como as permutações, arranjos e combinações. Tais recursos foram gerados por um projeto desenvolvido pela Unicamp (SP) e UFF (RJ), voltado para a produção de conteúdo de Matemática, abrangendo o currículo básico nas três séries do Ensino Médio. Entre os recursos incubados no referido projeto, destacam-se, entre outros, os relacionados logo abaixo (MEC, 2020):

> I – “O que é permutação”? Educação Básica. Ensino Médio. Matemática. Análise de dados e Probabilidade. Os objetivos desse recurso são: Discutir o significado da palavra permutação no contexto da Matemática; Apresentar os casos clássicos de problemas de Análise Combinatória;Aprensentar o Princípio Fundamental da Contagem.
>
> II – “Desejos”. Educação Básica. Ensino Médio. Matemática. Análise de dados e Probabilidade. Os Objetivos desse recurso são: Análise Combinatória. Combinação.
>
> III – “De quantas maneiras posso passar meu caderno”? Educação Básica. Ensino Médio. Matemática. Análise de dados e Probabilidade. O Objetivo desse recurso é: Fazer uma análise diferenciada sobre um problema de combinatória.
>
> IV – “Roda roda”. Educação básica. Ensino Médio. Matemática. Números e operações. Os objetivos desse recurso são: Introduzir conceitos de análise combinatória; Apresentar as permutações cíclicas; Aplicar o conceito de arranjos à solução de problemas com permutação cíclica.
>
> V – “De quantas maneiras posso amarrar meu cadarço”? Educação Básica. Ensino Médio. Matemática. Análise de dados e Probabilidade. Os objetivos desse recurso são: Análise combinatória; Combinação.
>
> VI – “Táxi e combinatória”. Educação Básica. Ensino Médio. Matemática. Análise de dados e Probabilidade. Objetivo(s): Análise combinatória; Combinação.
>
> VII – “A Cartomante”. Educação Básica. Ensino Médio. Matemática. Análise de dados e Probabilidade. Objetivo(s): Análise combinatória; Combinação.

O recurso didático "A cartomante" foi selecionado para uma maior discussão. A intenção foi utilizar esse recurso como modelo e fazer uma convergência didática usando os modelos lúdicos de autoria dos autores do presente artigo para demonstrar as regras matemáticas usadas em "Combinação" e Probabilidade como meios de solucionar problemas.

No processo da experimentação do recurso didático do MEC foi feito inicialmente o download de "A Cartomante" para conhecer, experienciar, entender e melhor avaliar essa ferramenta. Nesse jogo virtual logo de início, dispõe-se as cartas na mesa e pede ao cliente que ele escolha 04 cartas ao acaso para aprender o destino pela "Análise Combinatória". São 78 cartas do tarô. O cliente vai escolher 04 cartas ao acaso e assim usa a matemática combinatória para a leitura do destino (Figura 1). Quando o cliente escolhe as 04 cartas ao acaso e não importa a ordem da escolha, esse modo refere-se à Combinação de 78 objetos tomando-os 4 a 4. Isso é então interpretado na linguagem matemática como Combinação "C" de 78 cartas quatro a quatro. Continuando o jogo, a Cartomante pede para o (a) cliente escolher 04 cartas ao acaso do baralho inteiro. As cartas escolhidas pelo cliente devem então ser embaralhas. Em seguida o (a) cliente vai escolher, usando a ordem, 02 cartas, sendo que a primeira carta é a do Amor (estrela) e a segunda é a carta da fortuna (torre) e assim por diante. Esse modo forma refere-se ao "Arranjo" (A), ou seja, quais são todas possibilidades de arranjar as 4 cartas 2 a 2? Então, trata-se de um Arranjo de 4,2.

Figura 1 - "A cartomante". Portal do professor, MEC, 2020.

Fonte: Google imagens. Adaptado pelos autores.

Na linguagem matemática, ao ser escolhida a primeira carta, há quatro possibilidades e, para escolher a segunda carta, faça 4 subtraído de 1, ou seja, sobram 3 possibilidades. Primeiramente a estrela, depois a torre e assim por diante. Tem-se dessa forma 12 possibilidades. Assim como são 4 cartas, o universo de escolhas das 2 cartas e a ordem importa: a 1ª carta tem 4 possibilidades de ser escolhida. Sobram então 3 cartas para a 2ª carta ser escolhida. São 4 opções para a 1ª posição e 3 opções para 2ª posição. O Arranjo nesse caso é então o resultado do produto das possibilidades, ou seja, $A_{4,2} = 4 \times 3 = 12$; $A = 12$.

Agora, embaralha-se as 78 cartas e separa-se 7 cartas para colocar na mesa. O (a) cliente deverá escolher 3 destas 7 cartas. A ordem importa. Tem-se então 7 cartas que devem ser ordenadas 3 a 3 ou seja, Arranjo de 7, 3 a 3. Ao "retirar" a 1ª posição tem-se 7 cartas; para a 2ª posição tem-se agora 7 -1 = 6 e para a terceira posição temos 7 - 2 = 5. Então, $A_{7,3} = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

Generalizando, vamos substituir agora o número 7 por um número natural qualquer "n" e o número 3 por outro número natural inteiro "p" que indica as posições que deve ser menor ou igual a n. Temos então: $n \times (n - 1)$; $n \times (n - 2)$ ...$n \times (n - p)$. Assim, pode-se escrever uma fórmula geral para calcular o Arranjo. Para isso é necessário entender o que significa "Fatorial": "n fatorial" é a multiplicação de todos os números inteiros que vão de 1 até n!

Exemplificando: $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$

Escrevendo a formula geral:

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Desmembrando: $n \times (n-1)$; $n \times (n-2)$, ...$n \times (n - p)$. Então,

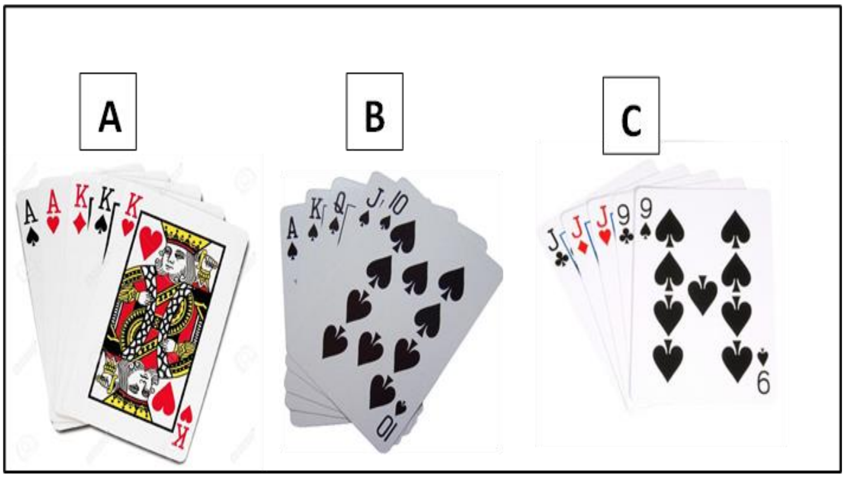
$A_{7,3} = 7!/(7-3)! = (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7) : (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 5040/24 = 210$

Brincando com dados e cartas: usando o lúdico para resolver problemas de Genética Clássica. Autores: Antônio Rogério Chaves de Souza e Theresa Christine Filgueiras Russo Aragão.

Cotidianamente as pessoas utilizam de forma quase imperceptível a matemática probabilística, já que essa matemática está presente em muitos processos naturais, ambientais, sociais como também nos jogos com sorteios milionários como é o caso da mega sena no Brasil. No jogo de poker, por exemplo, o acaso leva ao uso obrigatório da probabilidade. Cada mão de poker é formada por cinco cartas. No *Texas Hold'em*, o jogador usa cinco das sete cartas (duas na mão e cinco na mesa) que estão à sua disposição para formar a melhor mão possível e não há diferença entre os naipes. Dessa forma, está sempre se fazendo o uso da probabilidade (e um pouco de sorte) para formar um jogo vencedor. Um baralho de poker contém 52 cartas divididas em 4 grupos chamados de naipes. Os naipes são identificados por nomes e símbolos, são eles: Ouro, Copas, Paus e Espadas. O *Full- House* e o *Royal Flush* estão representados na Figura 2. A chance de um jogador conseguir fazer um Royal Flush com um único baralho de 52 cartas é de obter uma sequência de 10, Valete, Dama, rei e Ás de somente um naipe. A chance de ocorrer cada carta é de 1/52. A chance dessa sequência considerando um único naipe é de $(1/52)^4$, ou seja, uma chance muito pequena. É algo como acertar na mega sena. Mas ela é provável.

Em seus estudos sobre a hereditariedade, Gregório Mendel usou a probabilidade para expressar resultados entre cruzamentos de sementes de ervilha em sucessivas gerações. Munido por essa ferramenta matemática, Mendel estabeleceu duas importantes Leis representadas por proporções matemáticas. Seu trabalho fez uso de uma espécie vegetal, a ervilha, como modelo que serviu de base para diversas outras pesquisas sobre os mecanismos da hereditariedade. A Primeira lei de Mendel ou "Lei da Segregação dos Fatores" (Monoibridismo) consiste que cada uma das características de um indivíduo é determinada por dois fatores que se segregam (separam) ao ocorrer formação dos gametas.

Figura 2 - O *Full- House* e o *Royal Flush* no Poker. Trinca de K com dois ases (A); (C) trinca de valetes com dois noves (tipos de *Full-House* ou *Full-Hand*); (B) *Royal Flush*: sequência de 10 a "Ás" em um único naipe.

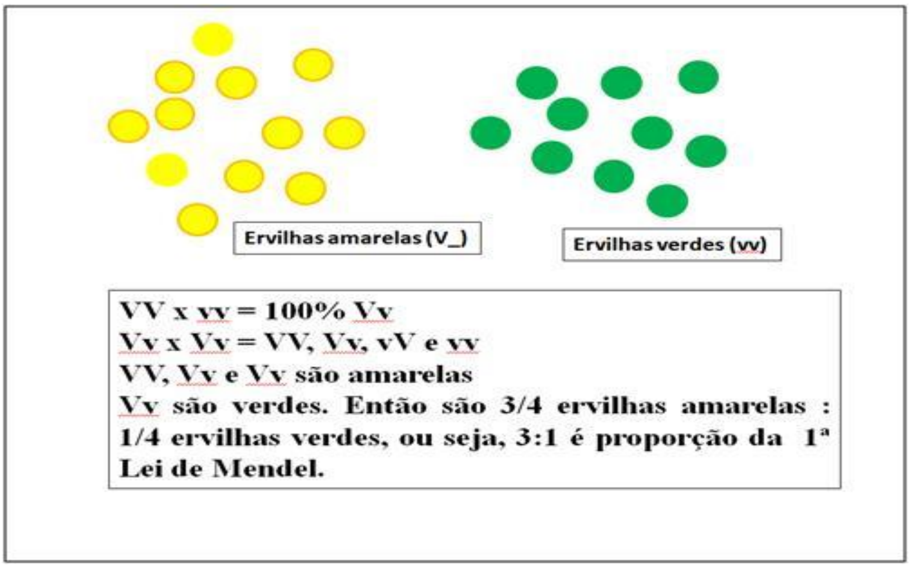


Fonte: Ilustração e edição dos autores

Assim, ocorrendo uma fecundação, cada indivíduo formado é composto por um par de gametas. A elaboração da 1ª Lei de Mendel foi obtida de seus experimentos com duas variedades de ervilhas - uma verde e amarela (Figura 3). Gregório Mendel constatou que as ervilhas originárias da fecundação destas duas linhagens diferentes produziam uma geração que ele denominou de F1, constituída por sementes amarelas

(75%) e de sementes verdes (25%). Essa produção levou Mendel a concluir que a variedade de sementes amarelas era uma variedade dominante por se expressar em maior percentagem. Dessa forma, Mendel expressou essa geração como geração 3:1 em proporção matemática. As ervilhas verdes foram então consideradas “recessivas” por terem se expressado em menor percentual. Assim se interpretarmos qual a probabilidade de num cruzamento entre ervilhas amarelas (dominantes) e ervilhas verdes (recessivas), nascerem ervilhas amarelas, temos: V - ervilha amarela e v - ervilha verde (JUNQUEIRA; CARNEIRO, 2000).

Figura 3 - A proporção matemática da 1ª Lei de Mendel.



Fonte: os autores

Do cruzamento entre as puras: VV x vv = 100% amarelas, já que todas serão Vv e a amarela é dominante (VV ou Vv).

No cruzamento Vv x Vv por “segregação” (meiose) ocorre a produção dos seguintes gametas: V e v. Assim, a fecundação (encontro ao acaso entre estes gametas) pode ser representada pelas seguintes probabilidades:

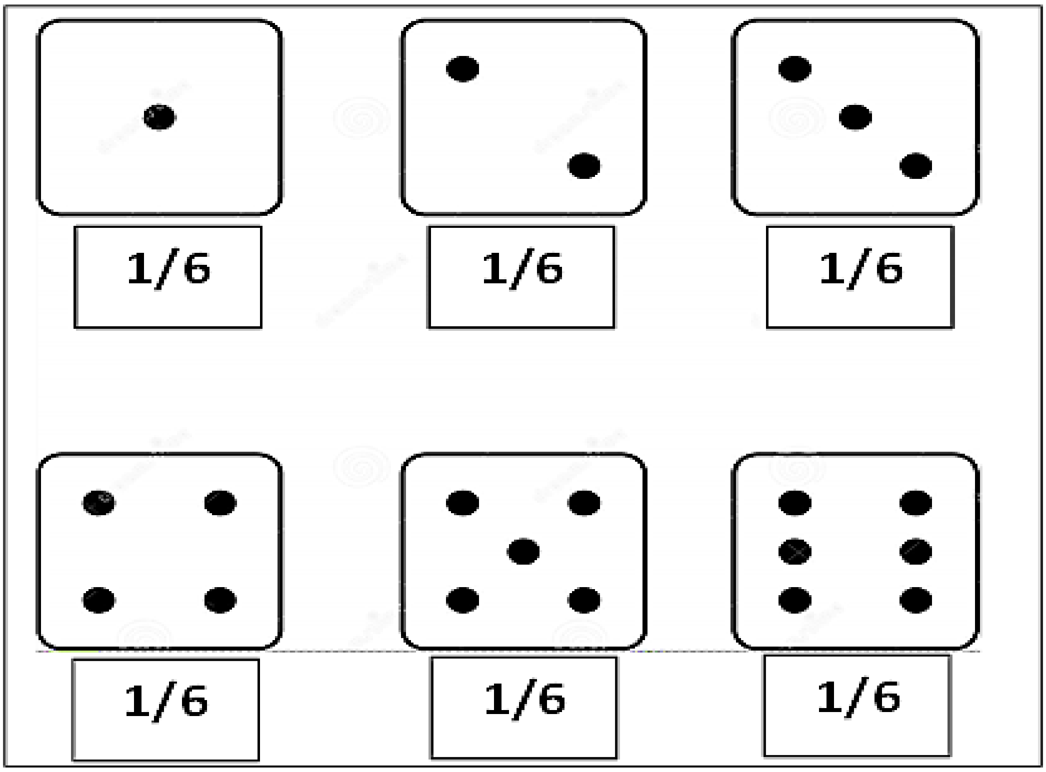
- Probabilidade de VV = 1 em 4
- Probabilidade de Vv = 2 em 4
- Probabilidade de VV = 1 em 4
- Probabilidade de ervilhas amarelas: VV, Vv e Vv = 1/4 + 2/4 = 3/4 (75%).

Há duas importantes regras da Probabilidade que são utilizadas para solucionar problemas que envolvem as Leis mendelianas: A regra do “E” e a regra do “OU”. O uso dessas regras comunica a Probabilidade como uma importante ferramenta matemática para a compreensão da expressão estatística da transmissão de caracteres adquiridos de uma geração a outra no contexto das leis mendelianas. Pra melhor entender as referidas regras vamos brincar com dados e moedas.

Brincando com os dados

Observem o seguinte problema e sua solução: Qual a probabilidade de um jogador de dados obter a face 5 no arremesso de um dado não viciado (ou seja, sem alterações no seu peso). A solução: Um dado, em seu todo, contém seis lados. Cada um dos lados é representado como ilustra a figura 4. Sabe-se que a probabilidade (**P**) da ocorrência de um determinado evento é igual ao número de possibilidades de interesse, ou seja, os eventos favoráveis, dividido pelo número total de possibilidades, ou seja, de eventos possíveis. Assim, **P** = número de eventos favoráveis/ número total de eventos possíveis (Figura 4).

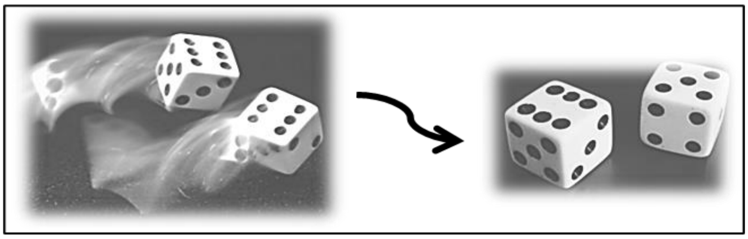
Figura 4 Um dado apresenta 6 diferentes faces: face 1, face 2, face 3, face 4, face 5 e face 6. Cada uma das diferentes faces pode ser representada numericamente pela fração 1/6.



Fonte: os autores

E se o jogador lançar dois dados, qual a chance de se obter a face 6 em um dado e a face 5 no outro dado em somente um arremesso (Figura 5).

Figura 5 - Lançamento simultâneo de dois dados. Qual a chance de em um dado sair a fase 5 e no outro dado sair a face 6?



Fonte: editado pelos autores.

Dessa forma, a probabilidade de ocorrer qualquer uma das faces do dado (face 1, face 2, face 3, face 4, face 5 e face 6) em um lançamento ou arremesso (ressaltando que deve se tratar de um dado não viciado) é: P = 1/6.

Então, retomando o problema, P (face 5) = 1/6. Porém, se agora são lançados simultaneamente dois dados, a probabilidade de se obter em um dado a face 6 e no outro dado a face 5 é dada pela multiplicação das probabilidades dessas ocorrências. Como as ocorrências são simultâneas usa-se a regra da multiplicação, ou a regra do "e". A lógica é: face 3 e a face 5 num único lançamento simultâneo. Então, P (face 6 e face 5) = P (face 6) x P (face 5) = (1/6) (1/6) = 1/36.

Brincando com moedas

Seja a seguinte situação: Uma moeda tem duas faces: a face Cara e a face Coroa. Qual a probabilidade de um jogador obter a face CARA no arremesso de uma moeda? P (CARA) = 50%; E se o jogador lançar três moedas, qual a chance de obter CARA/COROA/CARA nessa ordem em somente um arremesso?

Cada uma das faces da moeda está representada conforme ilustra a figura 6. A probabilidade de ocorrer qualquer uma das faces da moeda (CARA ou COROA) em um lançamento (ressaltando que deve se tratar de uma moeda não viciada) é P = 100%. Esse modo de solucionar refere-se a Regra do "OU" e o resultado é dado pela soma das probabilidades: P (CARA) = 50%; P (COROA) = 50%; P (CARA ou COROA)= 1/2 + 1/2 = 1 ou 100% de chance, pois, a probabilidade de um ocorrer, exclui a probabilidade do outro ocorrer.

No lançando simultaneamente três moedas qual a probabilidade de se obter a sequência: CARA/COROA/CARA? (figura 6). Sabe-se que essa probabilidade é dada pela multiplicação das probabilidades das ocorrências. Então, P(CARA/COROA/CARA) = (1/2) (1/2) (1/2) = $(1/2)^3$ = 1/8. Esse modo de resolver refere-se a Regra do "E". Quando as probabilidades não são excludentes, multiplica-se as chances.

Figura 6 - Faces de uma moeda: CARA ou COROA.

Fonte: editado pelos autores.

Figura 7. A sequência CARA/CORA/CARA obtida no lançamento simultâneo de 3 moedas não viciadas.

Fonte: imagens Google. Adaptado pelo autor.

Aplicando agora a Regra do "E" e a Regra do "OU" em problemas de Genética Mendeliana nos problemas que se seguem.

O albinismo é uma anomalia genética caracterizada pela ausência total ou parcial de pigmentação (melanina) tratando-se de uma recessividade em relação a pigmentação normal da pele (caráter dominante). Um casal formado por um homem albino e uma mulher de pele normal podem vir a ter filhos albinos? Para solucionar esse problema usa-se duas ferramentas: a Probabilidade e a concepção da 1ª Lei de Mendel. Assim, os seguintes passos devem ser construídos para solucionar esse problema:

Seja **a** Albinismo e **A** _ Pele Normal (caráter dominante). Dessa forma, o albinismo é representado pelo par de alelos "aa" e a pele normal pelos pares de alelos "AA" e "Aa". Assim tem-se em relação ao problema anteriormente citado que: Pai albino (aa) e Mãe de pele normal (AA) ou (Aa). Os possíveis cruzamentos nesse caso (P1 e P2) são:

- P1: Pai aa x Mãe AA = 100% Aa, ou seja, nenhum filho albino
- P2: P Pai aa x Mãe Aa = 50% Aa e 50% aa, ou seja, nesse caso há 50% de chance de nascer um filho albino desse casal.

Qual a chance do mesmo casal do problema anterior ter dois filhos sendo nessa ordem: o primeiro nascer menino e albino e o segundo nascer menina e de pele normal?

Veja que nesse caso a ordem importa e isso remete ao problema utilizar o recurso do MEC apresentado anteriormente no recurso a "A cartomante". Resolvendo, tem-se que:

- Probabilidade de nascer uma menina = 1/2
- Probabilidade de nascer um menino = 1/2

A Probabilidade de nascer uma criança albina nesse caso envolve os seguintes cruzamentos possíveis:

- Pai (aa) x Mãe (Aa) = 1/2 aa; 1/2 Aa, ou seja, a chance de nascer uma criança albina é de 50%

- Probabilidade de nascer o 1º menino e albino = (1/2) x (1/2) = 1/4

- Probabilidade de nascer o 2º filho menina e de pele normal = (1/2) x (1/2) = 1/4

Finalmente, a chance de o evento ocorrer na ordem que foi determinado é o produto das probabilidades, ou seja: (1/4) x (1/4) = 1/16.

Conclui-se que a Análise Combinatória e Probabilidade são ferramentas matemáticas que auxiliam a solucionar diversos problemas como também dialogam com outras ciências de forma colaborativa e facilitadora. Na representação matemática com uso do lúdico observou-se que os recursos didáticos lúdicos desenvolvidos pela criatividade dos professores autores do presente artigo para resolver problemas de genética são ações significativas que estão de acordo com os objetivos do ensino da matemática segundo os PCN/MEC 2020.

Conhecendo e experienciando os softwares Combina e GeoGebra

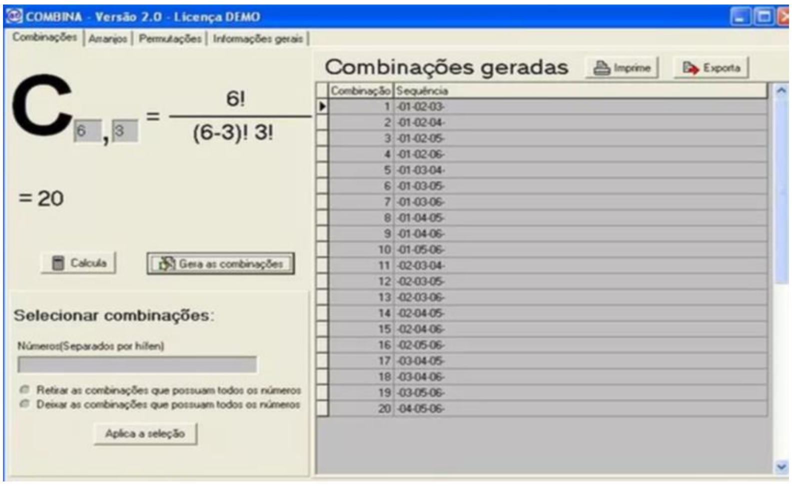
O COMBINA

O programa COMBINA foi desenvolvido na Universidade Federal do Ceará (UFC) pelo professor-programador e físico Adisio Anatoli Ribeiro. O Combina, segundo o autor é dirigido aos estudantes e profissionais que se utilizam de cálculos dessa natureza.

Ainda de acordo com Ribeiro (2019) o COMBINA calcula combinações, arranjos e permutações de análise combinatória e gera a listagem das mesmas. Na versão gratuita do programa podem ser calculadas análises sem limite. Embora seja um programa simples há restrições de geração de arquivos de listagens muito grande. Combinações muito grandes demoram na geração de listagens. Combinações com mais de 100.000 registros já se tornam bastante lentas. O sistema também não permite "p" maior que 2 casas.

O sistema gera e seleciona combinações, arranjos e permutações usando dezenas naturais de 1 a 99. As dezenas do sistema podem ser substituídas pelas dezenas do pesquisador que usa o COMBINA e, por conseguinte, gerar as combinações (Figura 8).

Figura 8. O "Combina". Cálculo de Análise Combinatória.



Fonte: https://www.techtudo.com.br/t

De acordo com Cleiton Batista Vasconcelos e Manoel Americo Rocha (2019), referindo-se a Combinações Simples, ao estudar arranjos simples de *n* objetos tomados *p* a *p*, com $1 \leq p \leq n$, há escolha e ordenação de *p* desses objetos. Dessa forma, para os algarismos 2, 3, 4 e 5, acaso se escolha o 3 e o 4, por exemplo é possível ordená-los de duas formas: 34 ou 43.

Se, no entanto, os algarismos 2 e 5 forem os escolhidos, podem ser ordenados também de duas formas como se segue: 25 ou 52

Mas, se acontecer a escolha dos algarismos 2, 3 e 5, eles podem ser então ordenados de seis formas como se segue: 235,253, 325, 352, 523 ou 532

Assim, para cada escolha de *p* dentre os *n* objetos dados tem-se um número de ordenações que coincide com o número de permutações de p objetos, ou seja, é igual a Pp. Denota-se essa afirmativa por: Cn,p é o número de escolha de p dentre n objetos distintos. Então, $A_{n,p} = C_{n,p} \times P_p$

Como cada uma dessas escolhas é uma combinação dos n objetos tomados p a p, então: Combinação simples de *n* objetos é uma combinação simples ou combinação de *n* objetos tomados *p* a *p*, com $1 \leq p \leq n$, é qualquer escolha de *p* desses objetos.

Exemplificando, dadas as vogais a, e, i, o, u, quais as combinações dessas letras tomadas 3 a 3? Solucionando são estes os 10 conjuntos: { a, e, i }, { a, e, o }, {a, e, u}, { a, i, o }, { a,i, u }, { a, o, u }, { e, i, o }, { e, i, u } e { i, o, u }

Utilizando então a notação de fatorial, tem-se que o número de combinações de **n** objetos distintos, tomados *p* a *p*, é dado por:

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

Assim resolvendo o problema anterior com a fórmula acima:

$$C_{n,p} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1\,(2 \times 1)} = 120 : 12 = 10$$

Indo agora ao programa COMBINA para cálculo de Combinações usando como exemplo n= 3 e p =2.

Obtenção das sequências de Combinações para n =3 e p=2 no COMBINA. Observe que foram geradas as seguintes sequências: 1-01-02; 2-01-03; 3-02-03.

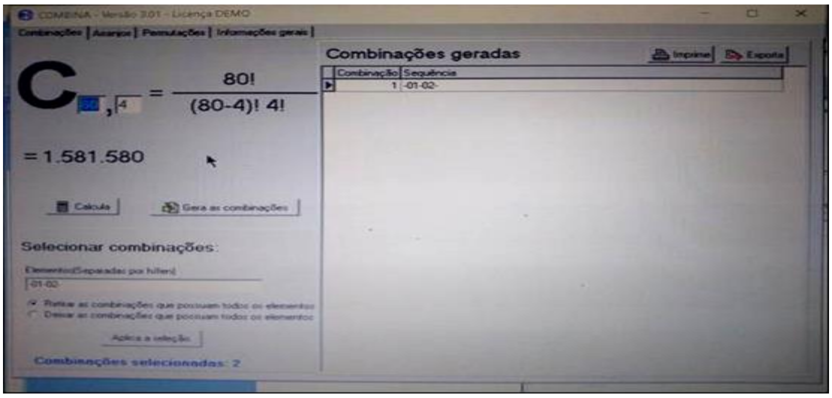
O resultado das Combinações totalizou 3 combinações possíveis. Se usarmos a fórmula C n. p, teremos:

$$C_{3,2} = \frac{3 \times 2 \times 1}{(3-2) \times 2} = 3$$

Dessa forma, para n=3 e p=2 tem-se 3 combinações possíveis que é o conjunto de sequências possíveis para esses valores n=3 e p=2: {01-02; 01-03; 02-03}

Utilizando agora uma combinação onde n=80 e p =4. O programa calcula a quantidade de combinações possíveis para esse n e p que é 1.581.580 combinações. Ao clicar na poção “gerar combinações” temos acesso a todas as combinações que podem ser copiadas e transferidas para o Excel ou Word (Figuras 9 e 10):

Figura 9. Total de combinações para n= 80 e p =4. Calculado no COMBINA



. **Fonte:** https://www.adisioribeiro.com.br/combina.html

Ainda no quesito "Combinações" do programa COMBINA, pode-se obter e selecionar combinações usando os itens: "gerar combinações" e "selecionar combinações". Como manusear o Arranjo (A) no programa COMBINA? Para experenciar esse viés da ferramenta COMBINA, inicialmente será realizada uma explanação sobre os cálculos com Arranjo.

De acordo com Cleiton Batista Vasconcelos e Manoel Americo Rocha (2019), os arranjos simples e os arranjos com elementos repetidos são agrupamentos que consistem na escolha e ordenação de parte dos elementos de uma coleção finita de objetos dados. Assim, temos, por exemplo:

> A partir dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 vamos escolher três entre eles e formar um número de três algarismos distintos, ou seja, um arranjo simples. Ainda, vamos formar um arranjo com elementos repetidos, isto é, repetindo os três algarismos escolhidos. Dessa forma são arranjos simples a partir da referida escolha, tomados 3 a 3: 123, 324, 154, 135, 145, 132
>
> Agora, exemplos de arranjos desses algarismos tomados 3 a 3: 113, 235, 233, 344,555, 432, 454

Qual o interesse? Determinar o número de arranjos simples e o número de arranjos desses algarismos tomados 3 a 3! Então, o que são Arranjo simples?

Dados os números inteiros positivos n e p, com $1 \le p \le n$, um arranjo simples dos n objetos distintos a1, a2, a3, ..., *an* tomados p a p é qualquer ordenação de p objetos diferentes escolhidos dentre esses objetos.

E o que é arranjo com elementos repetidos? Dados os números inteiros positivos n e p, com $1 \le p \le n$, um arranjo com repetição dos n objetos distintos a1, a2, a3, ..., an tomados "p a p" é qualquer ordenação de p objetos, diferentes ou não, escolhidos dentre esses objetos.

Quanto ao número de arranjos simples, o número de arranjos simples de "n" objetos tomados "p a p" pode ser determinado pelo produto $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \ldots \times (n - p + 1)$.

Indicando agora esse número por An,p: $A_{n,p} = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \ldots \times (n - p + 1)$.

Em se referindo ao número de arranjos com repetição, tem-se que: O número de arranjos com repetição de n objetos tomados "p a p" $(1 < p \le n)$ pode ser determinado pelo produto $n \times n \times n \times \ldots \times n$, p fatores.

Indicando esse número por (AR)n,p, tem-se: $(AR)_{n,p} = n \times n \times n \times n \times \ldots \times n = np$.

Em síntese, O número de arranjos simples ou o número de arranjos com elementos repetidos de "n" objetos tomados 1 a 1 é igual a n.

Exemplificando o uso dessa ferramenta matemática de acordo com Cleiton Batista Vasconcelos e Manoel Americo Rocha (2019):

> Se numa sala de aula com 20 alunos disponibilizarmos bolsas de estudos para os 5 primeiros colocados, com bolsas de valores diferentes, cada bolsa possível é um arranjo simples dos 20 alunos tomados 5 a 5.
>
> Solucionando: O número de maneiras de doar as distintas bolsas de estudos aos 5 alunos da sala com 20 alunos é encontrado pelo cálculo do Arranjo dos 5 primeiros colocados de uma turma de 20 alunos que é dado por: $A_{20,5} = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 = 1.860.480$. Pode-se também usar a seguinte fórmula: $A\ n, p = n!/ (n - p)!$

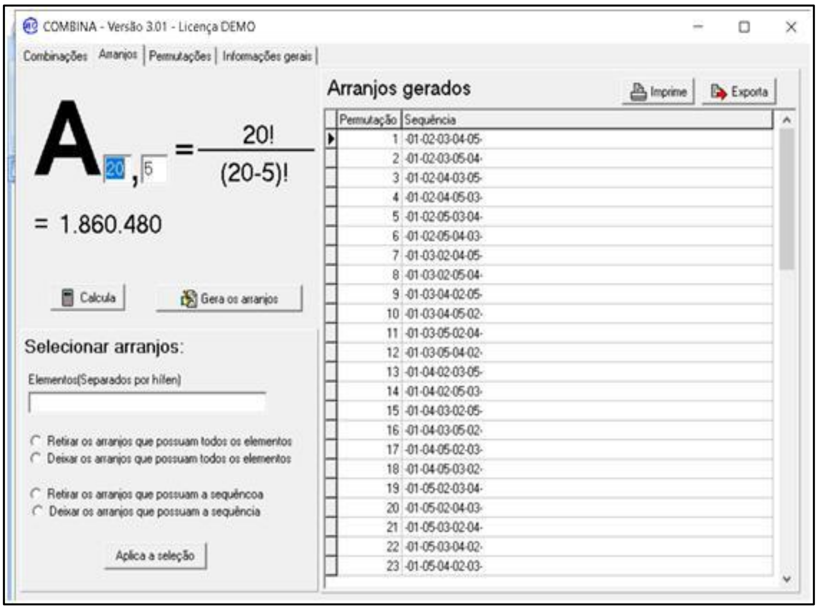
O **n** é o número total de eventos e **p** objetos diferentes escolhidos dentre estes. Assim no exemplo acima citado, n=20 e p=5.

Calculando o Arranjo no exemplo anterior: $A_{20,5} = (20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15!) : (15!) = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 = 1.860.480$

Agora, trazendo esse mesmo problema matemático para dialogar com as ferramentas do COMBINA (Figura 10).

Entrando no programa COMBINA via download gratuito da versão 3.01, licença DEMO foram então inseridos (conforme figura 15) o n = 20 e p = 5 referentes ao problema exemplificado anteriormente. Foi encontrado então o valor do $A_{20,5}$. 439

Figura 10. Arranjo no COMBINA. Observe as janelas disponibilizadas para escrever o n e o do seu problema.



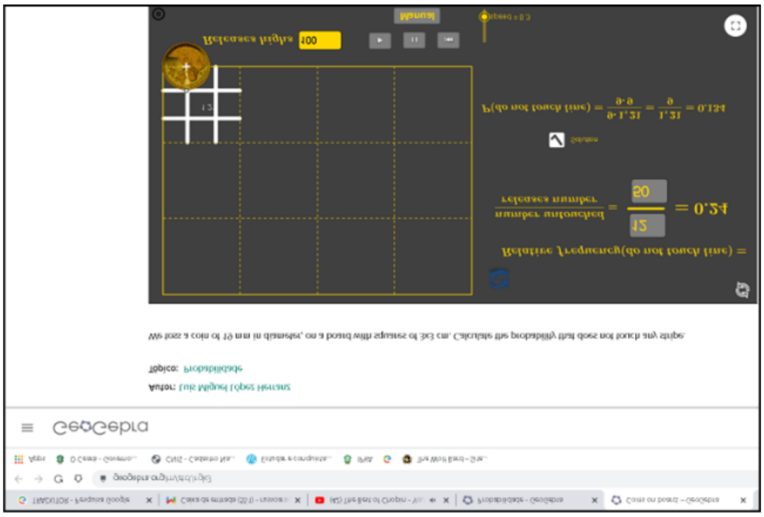
. **Fonte:** https://www.adisioribeiro.com.br/combina.html

Assim, além de se obter no Combina a solução do $A_{20,5}$ que é 1.860.480, o programa também permitiu o acesso de todos os arranjos gerados usando a janela “gerar arranjos”. Os arranjos podem ser copiados e lançados no Excel ou outro programa com plataformas gráficas. Também é possível usando a janela “selecionar arranjos” retirar uma região do arranjo no geral e transferir para uma área de trabalho ou lançar numa plataforma tipo Excel.

O GeoGebra

Após acessar gratuitamente o GeoGebra, na opção “Menu” foi escolhido inicialmente o programa que contextualiza o assunto Probabilidade. Na figura 11 visualiza-se a janela do GeoGebra para experienciar o *Coins in board*, um game que usa probabilidade.

Figura 11. GeoGebra. Trabalhando com o O *Coins in board*. Números trabalhados: 12 e 50.



Fonte: https://www.geogebra.org/m/ztcUrgk3

Trabalhando com os números 12 e 50 foi calculada a probabilidade da frequência relativa da probabilidade do objeto do jogo tocar na linha do quadrante inferior esquerdo do jogo como mostra a figura 11. A probabilidade de tocar na linha foi dada por 12/50 = 0,24. No jogo pode-se tentar infinitas vezes o calculo da probabilidade e ter acesso as respostas como meio de exercício.

Seguindo com a experiência no Geogebrae e utilizando um outro recurso denominado “As flores da D. Amélia” de autoria do Mathgebra, trabalhou-se com o tópico “Gráfico de função, Probabilidade e Estatística”. No referido tópico há vários programas disponibilizados no GeoGebra.

No programa denominado "As flores da D. Amélia" pode-se calcular a frequência absoluta de amostras de tipos de flores (papoula, tulipas, orquídeas e outras espécies) e os respectivos ângulos. A visualização é totalmente gráfica. No Quadro 1 está demostrada uma distribuição simulada pelos autores do artigo na experimentação desse programa. A relação entre amostra de flores, frequência absoluta e valores dos ângulos no programa "As Flores da D. Amélia" foi encontrada a partir dessa amostra escolhida aleatoriamente.

Quadro 1. GeoGebra. "As Flores da D. Amélia". Frequência e ângulos.

A	B	C
Flores	**Frequência absoluta**	**Ângulo**
02 Papoulas	24	76°
03 Tulipas	41	129°
04 Orquídeas	23	73°
05 Outras	82	26°
Total	**114**	**360°**

Fonte: o autor

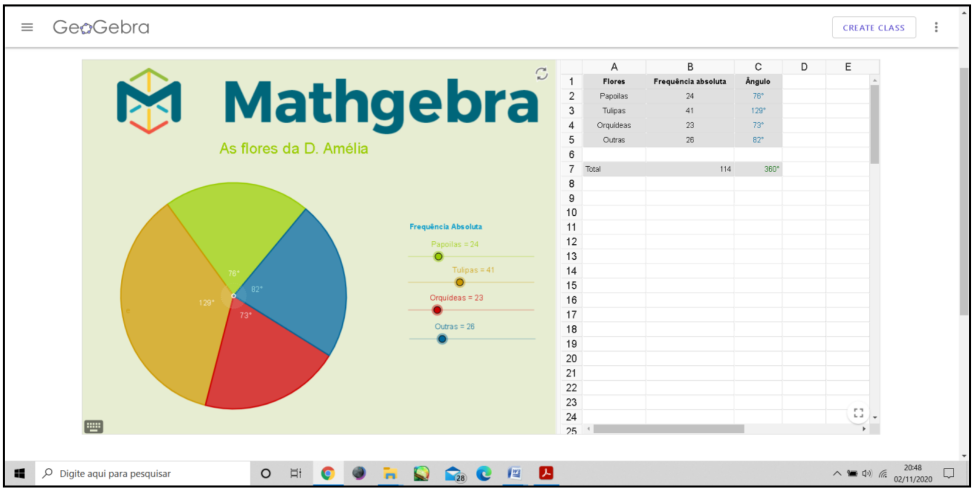
Na figura 12 está visível a foto do painel do jogo demonstrando a relação entre frequência absoluta das flores (evento) e sua apresentação gráfica em função dos ângulos que somam no total 360°. Cada cor no gráfico de pizza representa um tio de espécie de flores. As quantidades relativas percentuais são mostradas nos pedaços da pizza por meio dos ângulos formados com um eixo imaginário cartesiano. As frequências absolutas das probabilidades da ocorrência das flores correspondem também as cores no gráfico e são representadas por linhas.

O resultado gráfico corresponde a ocorrência de 02 papoulas, 03 tulipas, 04 orquídeas e 05 outros tipos de flores, entre estas, margaridas. O jogo é dinâmico, colorido, com visibilidade e beleza já que usa cores.

A formação imediata dos gráficos permite analisar de forma instantânea o comportamento das probabilidades.

Observou-se que a soma total das frequências das possibilidades da quantidade variável da amostra de flores nesse modo de programação é de 360°, ou seja, corresponde ao total de ângulos internos de uma circunferência.

Figura 12 "As Flores da D. Amélia". Relação entre frequência absoluta das flores (evento) e sua apresentação gráfica em função dos ângulos que somam no total 360°.



Fonte: https://www.geogebra.org/search/As%20Flores%20da%20D.%20Am%C3%A9lia

Outra experiencia vivenciada pelos autores do presente artigo foi jogar o jogo denominado "Lançamento de um dado cúbico perfeito". Esse recurso GEOGEBRA é do autor Carlos Carvalho e o tópico trabalhado é a Probabilidade.

O jogo consiste em fazer lançamentos de um dado cúbico perfeito e resolver questões de probabilidade propostas pelo comando do jogo.

Figura 13 GeoGebra. O lançamento de um dado cúbico perfeito.

Fonte: https://www.geogebra.org/m/ZPtcCu72

Pode-se jogar várias vezes esse jogo que sempre traz desafios para se resolver questões de probabilidades.

Discutindo as afirmativas do jogo em um lançamento feito na experiência dos autores, tem-se (figura 13):

Afirmativa a: É mais provável que o número de pontos obtido seja diferente de seis do que igual a seis.

Discussão da afirmativa a: A chance no lançamento de ocorrer voltada para cima qualquer um dos números de pontos do dado (1, 2, 3, 4, 5 ou 6) é igual para todos= 1/6. Reposta: Afirmativa falsa.

Afirmativa b: É tão provável que o número de pontos obtidos seja par como ímpar

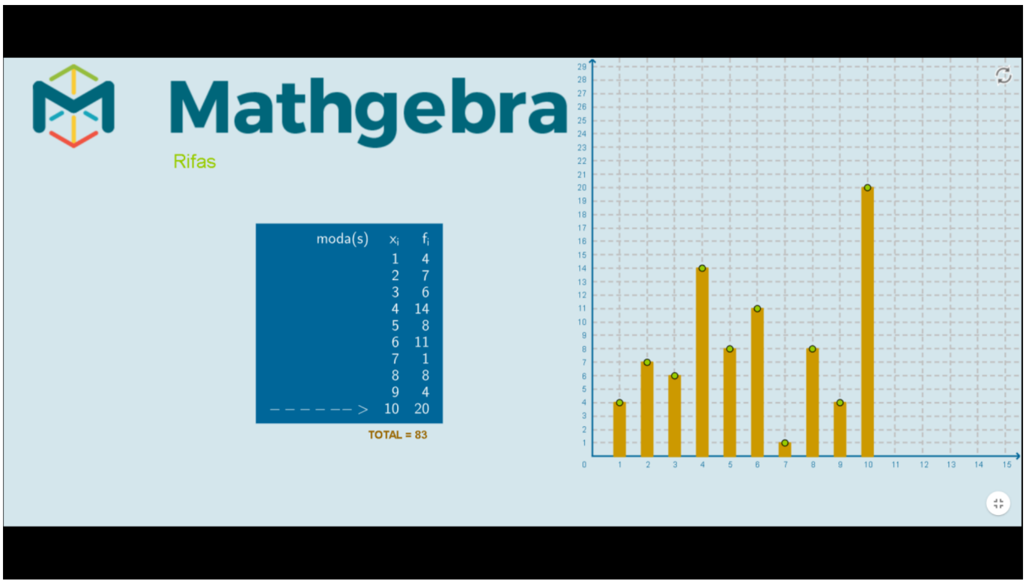
Discussão da afirmativa b: Faces pares: 2, 4 e 6; Faces ímpares: 1 e 3. A chance de ocorrer uma face voltada para cima que seja par em um lançamento do dado é = 3/6; A chance de ocorrer uma face voltada para cima que seja impar em um lançamento do dado é = 2/6. Resposta: Afirmativa falsa. A chance de ocorrer uma face par é maior do que a chance de ocorrer uma face impar em um lançamento de um dado.

Afirmativa c: Afirmativa correta.

Experienciando o programa "Rifa". Programa GeoGebra, recurso: "Rifa". Autoria do Mathgebra. Tópico: Médias, Moda, Probabilidade, Estatística.

No jogo "Rifa" pode ser movida a média da(s) coluna (s) do gráfico e os valores de x e y serão automaticamente alterados de acordo com esse(s) movimento(s). Dessa forma pode-se estabelecer várias coordenadas relativas ao gráfico padrão do recurso e usá-las em função de problemas a serem solucionados (Figura 14) 443

Figura 14. Dinâmica do recurso TI "A Rifa". GEOGEBRA. Conteúdo: Moda, Probabilidade, Estatística.



Fonte: https://www.geogebra.org/m/VjszU6P5

O jogo modula os números da rifa e estabelece a frequência de números escolhidos ao acaso. O gráfico simula o movimento da rifa em gráficos de coluna. O jogo é um game muito divertido e além da probabilidade há o exercício do aprendizado de estatística descritiva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso das Tecnologias de Informação (TI) na Educação tem sido alvo de muitas discussões filosóficas e pedagógicas em Universidades, governos e empresas educacionais. De acordo com a ONU, no documento da Agenda 2030, o uso da Tecnologia de Informação e Comunicação são “o motor que impulsiona soluções práticas e inovações que podem contribuir para o crescimento inclusivo” (ONU, 2013).

Autores apontam que as TI são importantes ferramentas colaborativas no ensino e na aprendizagem do Nível Médio e que o incentivo de Políticas Públicas voltadas para o incremento de TI nas escolas públicas, principalmente nas escolas públicas estaduais é meio colaborativo e facilitador do ingresso de jovens estudantes de baixa renda nas Universidades.

A possibilidade da diminuição da exclusão digital pela integração do aluno nos conteúdos de matemática com o auxílio das TI é assunto incubado no bojo das discussões no contexto da formação de docentes licenciados em Matemática. A ideia é que estes docentes devem alcançar durante a sua formação, uma *práxis* de uso das ferramentas dessas tecnológicas e trabalhar um meio de fusioná-las aos conceitos e modelos matemáticos ortodoxos de forma a desenvolver meios de melhorar o ensino e a aprendizagem de Matemática.

No contexto da estatística e da probabilidade é sabido que essas ferramentas são usadas em inúmeros vieses do cotidiano dos cidadãos, como na economia, na meteorologia, em padrões de Saúde Pública e outros importantes contextos sociais. A análise Combinatória é outra relevante ferramenta e de igual importância já que é fundamental como base da Ciência da Computação e da Tecnologia da Informação.

No contexto da Análise Combinatória e da Probabilidade, uma lista de programas e ferramentas didáticas online está disponível no site do MEC na forma de coleção de recursos que abordam conteúdos relacionados à contagem, desde o princípio fundamental da contagem até técnicas específicas como as permutações, arranjos e combinações. Também, de modo online e uso gratuito, softwares TI que contextualizam jogos para aprender Análise Combinatória e Probabilidade podem ser experienciados e avaliados por rofessores(as) e alunos(as) como por exemplo o COMBINA e GeoGebra, todo como reais possibilidades didáticas para colaborar com o ensino de conteúdos de Matemática do Ensino Médio.

Finalmente, o presente artigo teve como meta comunicar vivências experimentais dos autores com recursos didáticos lúdicos e softwares educativos tendo por meta referenciar métodos diferentes dos ortodoxos para aprender/ensinar Análise Combinatória e Probabilidade. Outra significante meta a ser alcançada por meio de trabalhos como o apresentado nesse artigo é a promoção de capacidades e análise crítica dos estudantes do Ensino Médio para que alcancem não somente vagas em Universidades, mas saibam utilizar ferramentas matemáticas para compreender e enfrentar os desafios do mundo moderno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGENDA 2030. ONU, 2016

BELLUZZO, R. C. B. Transformação digital e competência em informação: reflexões sob o enfoque da Agenda 2030 e dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável. **Conhecimento em Ação**, Rio de Janeiro, v. 4, n. 1, 2019.

BRASIL ESCOLA. https://brasilescola.uol.com.br/ acesso em dezembro de 2022

CARNEIRO; R. F. ; BRANCAGLION PASSOS, C. F.A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas aulas de Matemática: Limites e possibilidades. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 8, n. 2, p. 101-119, 2014.

CASTILHOS. T. B. Reflexões e análises das dificuldades dos alunos e professores do Ensino Médio em Análise Combinatória e Probabilidade. REMAT, v. 1, n. 2, 2015.

COMBINA. https://www.adisioribeiro.com.br/combina.html acessado em janeiro de 2023.

DOS SANTOS FERREIRA, G. M.; CASTIGLIONE, R. G. M. TIC na educação: ambientes pessoais de aprendizagem nas perspectivas e práticas de jovens. **Educ. Pesqui.,** São Paulo, v. 44, e153673, 2018.

GEOGEBRA. https://www.geogebra.org/m/ztcUrgk3 acessado em janeiro de 2023

IPEA. O Uso de Tecnologia da Informação para o Enfrentamento à Pandemia da Covid-19. Nota técnica N. 38. **Diest Diretoria de Estudos e Políticas do Estado, das Instituições e da Democracia,** 2020.

JUNQUEIRA, L. C.; CARNEIRO. **Biologia celular e molecular.** 7. ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 2000

LÉVY, Pierre. **Cibercultura.** Tradução de Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Editora 34, 2009.

LÖBLER, M. L.; VISENTINI, M. S.; KATHIANE BENEDETTI CORSO, K. B.; DAS SANTOS, D. L. Acesso e uso da Tecnologia da Informação em escolas públicas e privadas de ensino médio: o impacto nos resultados do ENEM. **Revista Eletrônica Sistemas & Gestão** 5 (2) 67-84 Programa de Pós-graduação em Sistemas de Gestão, TEP/TCE/CTC/PROPP/UFF, 2010.

MEC. Ministério de Educação. http://portal.mec.gov.br/ Acessado em março de 2023.

MEC. PCN/MEC, 2022 http://portal.mec.gov.br/ acesso em dezembro de 2022

OLIVEIRA, Maria O. E. de. A disseminação da informação na construção do conhecimento e na formação da cidadania. In: **XIX Congresso brasileiro de biblioteconomia e documentação,** Porto Alegre, PUCRS, 2000.

ONU. Organização das Nações Unidas. Agenda 2030. https://brasil.un.org/pt-br Acesso em abril de 2023.

PEAUCELLE, J. L. **Informatique pour gestionares.** Paris: Vuilbert, 1976.

ROCHA, M. A.; VASCONCELOS, C. B. Matemática. Análise Combinatória e Probabilidade. Computação. Química. Física. Matemática https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/552535/1/Livro%20Ana%CC%81lise%20Combinatoria%20e%20Probabilidade%20.pdf acesso em abril de 2023

UNESCO. Site oficial. Acesso em 2020.

VASCONCELOS, C. B; ROCHA, M. A. Matemática Análise Combinatória e Probabilidade. 3ª Edição, Editora Vozes. 2013.

ISSN - 2675 – 3375