

COMPREENDENDO O MODELO DE GOMPERTZ E SUAS APLICAÇÕES

Kissia Anne Matos Máximo¹

RESUMO: O objetivo desse artigo é apresentar um estudo sobre o Modelo Matemático de Gompertz e sua aplicabilidade. Para ilustrar a aplicabilidade do modelo, foi escolhido o estudo do tamanho de tubarões da espécie *Sphyrna lewini*, onde será feita uma análise da relação entre comprimento e tempo desses animais. Os dados utilizados nesse artigo foram obtidos a partir da literatura. Para a análise da relação entre comprimento e tempo dos tubarões da espécie *Sphyrna lewini*, foi utilizado o modelo matemático de Gompertz. O software Maple foi utilizado para a plotagem do gráfico.

Palavras-chave: Educação. Modelo de Gompertz. Equações Diferenciais ordinárias. *Sphyrna lewini*.

ABSTRACT: The aim of this article is to present a study on the Gompertz Mathematical Model and its applicability. To illustrate the applicability of the model, the study of the size of *Sphyrna lewini* sharks species was chosen, where an analysis of the relationship between length and time of these animals will be made. The data used in this article were obtained from the literature. The Gompertz Mathematical Model was used for the analysis of the relationship between the length and time of *Sphyrna lewini* sharks. The Maple software was used for the graph plotting.

2134

Keywords: Education. Gompertz Model. Ordinary Differential Equations. *Sphyrna lewini*.

INTRODUÇÃO

Modelos matemáticos são conjuntos de ferramentas que nos permitem apresentar matematicamente processos do mundo real. Eles são criados para aproximar a realidade, permitindo-nos compreendê-la melhor e até mesmo tentar uma possível modificação. Modelos matemáticos são excelentes instrumentos para fazer estimativas através de pesquisa, verificação e interpretação. É importante ressaltar que os modelos exigem informações consistentes, ou seja, usar dados precisos para alimentar o modelo matemático é essencial para garantir que o resultado das pesquisas se aproxime o máximo possível da realidade. No presente artigo trataremos sobre o Modelo de Gompertz e uma das suas aplicabilidades.

¹ Formada em Matemática pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ). Licenciatura em matemática pela UERJ/FFP.

O modelo de Gompertz é uma equação diferencial que descreve o crescimento exponencial limitado de uma população ou sistema. Embora inicialmente tenha sido desenvolvido para o estudo da dinâmica populacional, o modelo de Gompertz também tem aplicações em outras áreas, incluindo a matemática educacional e biologia. No contexto do ensino de matemática, o modelo de Gompertz pode ser utilizado para ensinar uma variedade de conceitos, desde a matemática básica até tópicos mais avançados. Por exemplo, os estudantes podem ser apresentados ao modelo como uma ferramenta para modelar o crescimento populacional e depois serem desafiados a aplicar a equação em diferentes cenários.

O estudo de Chandni e colaboradores (2019) explorou o uso do modelo de Gompertz no ensino de cálculo. Os autores do estudo relataram que a abordagem ajudou os estudantes a entender conceitos como limite e derivada de uma maneira mais concreta. Além disso, os estudantes foram capazes de aplicar o modelo em situações do mundo real, o que ajudou a tornar o conteúdo mais relevante e interessante para eles.

O estudo de Zhang e colaboradores (2020), investigou a aplicação do modelo de Gompertz no ensino de matemática financeira. Os autores do estudo descobriram que o modelo pode ser usado para explicar conceitos financeiros, como juros compostos e rendimentos de investimentos. Além disso, o modelo pode ajudar os estudantes a entender como as taxas de crescimento mudam ao longo do tempo.

O modelo de Gompertz na biologia tem sido aplicado em muitos estudos para entender a dinâmica populacional de diversas espécies, bem como para prever o crescimento em diferentes cenários. No entanto, o uso do modelo de Gompertz na análise do crescimento e tempo de vida do tubarão martelo é pouco explorado na literatura científica.

Os tubarões martelo são uma espécie fascinante, conhecida por sua cabeça distintiva em forma de martelo e comportamento social complexo. Eles são encontrados em todo o mundo em águas quentes e temperadas e são importantes na pesca comercial e esportiva. O crescimento e tempo de vida do tubarão martelo são importantes fatores que afetam a sustentabilidade de suas populações, mas a compreensão desses fatores ainda é limitada.

Neste estudo, investigamos a aplicação do modelo de Gompertz na análise da relação crescimento e tempo de vida do tubarão martelo. Nosso objetivo é explorar o potencial do modelo de Gompertz para fornecer informações valiosas sobre o crescimento e a vida útil

desta espécie, bem como para informar as medidas de conservação necessárias para garantir a sobrevivência das populações de tubarão martelo. Abaixo estarão citadas algumas medidas que podem ajudar na preservação da espécie.

- 1) Restrição da pesca, pois uma das principais ameaças os para o tubarão martelo é a pesca excessiva e desregulamentada. Para proteger esses animais é necessário limitar a pesca comercial e implementar regulamentações mais rigorosas para a pesca recreativa.
- 2) Estabelecer áreas protegidas: A criação de áreas protegidas, como reservas e parques marinhos, é fundamental para a proteção dos tubarões martelo. Essas áreas fornecem habitats seguros e garantem que os animais possam se reproduzir e se alimentar sem interferência humana.
- 3) Monitorar as populações: Para garantir a sobrevivência dos tubarões martelo, é importante monitorar as populações e coletar dados sobre o tamanho, a distribuição e o comportamento desses animais. Essas informações podem ajudar a identificar as áreas mais críticas para a conservação e orientar esforços de conservação.
- 4) Sensibilizar a população: A sensibilização da população é crucial para a conservação dos tubarões martelo. É importante educar as pessoas sobre a importância desses animais no ecossistema marinho e os riscos que a pesca excessiva representa para suas populações. Isso pode ajudar a promover mudanças comportamentais e reduzir a demanda por produtos de tubarão.
- 5) Promover pesquisas científicas: As pesquisas científicas são fundamentais para entender a biologia e o comportamento dos tubarões martelo, bem como as ameaças que enfrentam. Esses estudos podem ajudar a orientar esforços de conservação e identificar novas formas de proteger esses animais.

É importante que os governos, as organizações de conservação e a população em geral trabalhem juntos para proteger esses animais e garantir um futuro sustentável para o ecossistema marinho.

Este estudo tem implicações importantes para a gestão da pesca e conservação da espécie, bem como para o entendimento geral do modelo de Gompertz em aplicações biológicas. Esperamos que nossos resultados possam fornecer uma base para estudos futuros sobre o crescimento e tempo de vida do tubarão martelo e outras espécies de tubarões, bem como aprimorar a compreensão geral sobre o uso do modelo de Gompertz em biologia.

MODELO MATEMÁTICO DE GOMPERTZ E SUA HISTÓRIA

Benjamin Gompertz foi um matemático e atuário judeu. Nascido em 1779 na cidade de Londres, na Inglaterra e faleceu aos 86 anos em 1865, na mesma cidade. Ele é o responsável

pelos principais estudos sobre mortalidade do século XIX, que comprovou que a taxa de mortalidade da população cresce geometricamente. Em 1825, apresentou uma lei que descrevia o crescimento geométrico da taxa de mortalidade, estudo esse que apresentou um avanço em relação aos estudos de Thomas Malthus, voltado ao cálculo de anuidades e seguros contra morte.

A fim de descrever o crescimento de tumores sólidos, Gompertz desenvolveu uma equação famosa que denominamos Modelo de Gompertz. Nos estudos e pesquisas, encontramos diversas formas de apresentação dessa equação, por exemplo:

1. $L_t = L_{\infty}(-e^{-k(t-t_0)})$, este na realidade se apresenta de forma convexa, cuja inclinação decresce gradualmente, tendendo para uma assíntota superior paralela ao eixo da abscissa, que corresponde ao comprimento máximo teórico, L_{∞} (GULLAND, 1975);
2. $\frac{dL(t)}{dt} = K_2 \cdot L(t) \cdot (w - \ln(L(t)))$, para esse modelo de Gompertz, a curva de crescimento já não é simétrica no ponto de inflexão, mostrando um crescimento mais rápido no início, mas uma aproximação mais lenta ao tamanho máximo assintótico (De Sapio, 1990).

Mas, nesse trabalho, consideramos o modelo matemático descrito em (Araújo et al 2016), pela EDO de variáveis separáveis:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) \ln\left(\frac{K}{y(t)}\right); y(t) = 0, \quad (1)$$

onde,

- $y(t)$ = comprimento do S. Lewini em cm em determinado tempo;
- r = constante associada à taxa de crescimento;
- t = tempo em anos;
- K = tamanho médio máximo.

OBJETIVOS

No presente estudo, a equação (1), acima descrita, será utilizada para mostrar a aplicabilidade do Modelo de Gompertz para fazer uma análise sobre o comprimento dos tubarões-martelo, *Sphyrna lewini*, em um determinado intervalo de tempo.

APLICAÇÃO DO MODELO DE GOMPERTZ NO ESTUDO DE COMPRIMENTO DO TUBARÃO MARTELO

Como primeiro passo, resolveremos analiticamente a equação (1), deste modo temos:

Denotando

$$u = \ln\left(\frac{y}{K}\right) \rightarrow -\ln\left(\frac{K}{Y}\right) \quad (2)$$

Substituindo na equação (1), tem-se

$$\frac{du}{dt} = -ru \rightarrow \frac{du}{u} = -rdt$$

Integrando em ambos lados

$$\int \frac{du}{u} = \int -rdt$$

$$\ln(u) = -rt + c$$

2138

Então,

$$u = e^{-rt+c}$$

$$u = e^{-rt} \cdot e^c, e^c = \text{constante}$$

$$u(t) = C \cdot e^{-rt} \quad (3)$$

Para $t=0$, $u(0) = C \cdot e^{-0} = C$, mas

$$u(0) = \ln\left(\frac{y(0)}{K}\right) = \ln\left(\frac{y_0}{K}\right) = C$$

Portanto, da equação (3), temos que:

$$u(t) = e^{-rt} \cdot \ln\left(\frac{y_0}{K}\right) = \ln\left(\frac{y_0}{K}\right)e^{-rt} \quad (4)$$

Substituindo $u(t)$ na equação (4), e por (2) temos:

$$\ln\left(\frac{y(t)}{K}\right) = \ln\left(\frac{y_0}{K}\right)e^{-rt}$$

Isolando $y(t)$ temos a solução geral da eq. (1)

$$y(t) = K \cdot \left(\frac{y_0}{K}\right)e^{-rt} \quad (5)$$

Para obtenção e análise dos gráficos, valores foram atribuídos para K , r e y_0 , sendo 2139 esses valores obtidos através do estudo de (Kotas 2004). Sendo assim os valores são 347,94cm; 0,1/ano e 45cm respectivamente. Substituindo na equação (5) temos:

$$y(t) = 347,94 \cdot \left(\frac{45}{347,94}\right)e^{-0,1t} \quad (6)$$

Resolvendo a equação (6) e aplicando uma variação de tempo entre 0 e 40 anos, o gráfico plotado ficou assim descrito:

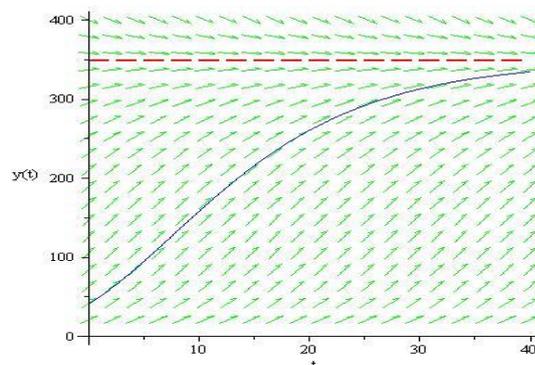


Figura 1- Relação comprimento ($y(t)$)/idade (t) do S. Lewini onde ($y_0 = 41$ cm; $r = 0,1$ / ano, $K = 347,94$ e t varia de 0 a 40 anos.

Para plotar o gráfico foi utilizado o Maple, que é um software usado para realizar cálculos matemáticos. Ele é amplamente utilizado em matemática, engenharia, ciências e outras áreas relacionadas, para realizar cálculos simbólicos, simulações e visualizações de gráficos.

Nosso modelo leva em consideração apenas uma aproximação do tamanho que o indivíduo terá em determinada idade. É necessário deixar claro que o modelo utilizado, apesar de apresentar pressupostos realistas, como por exemplo, a necessidade de o crescimento ser descrito como sendo exponencial, mas restrito onde, eventualmente, entra numa fase estacionária (ou seja, tenha um comprimento máximo) não consideram alterações no ambiente para além de fatores ambientais fixos. De fato, é improvável que uma espécie siga um único modelo de crescimento em toda sua vida.

CONCLUSÃO

Em suma, este estudo teve sucesso em alcançar seu objetivo geral de analisar o crescimento dos tubarões da espécie *Sphyrna lewini* por meio do Modelo Matemático de Gompertz. A aplicação prática deste modelo pode ser utilizada em futuras pesquisas sobre a espécie, fornecendo informações valiosas e projeções confiáveis. Além disso, as contribuições teóricas demonstram a importância e confiabilidade dos modelos matemáticos na análise de dados e estimativas da realidade.

2140

REFERENCIAS

AGGARWAL, Chandni et al. Teaching the Gompertz model in a calculus course: A historical and mathematical perspective. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, volume 50, número 2, 256-271, 2019.

ARAÚJO, Jorge et al. Modelos de Von Bertalanffy e Gompertz para descrever os parâmetros de tamanho e peso médio de Tilápias. *Caderno do IME- Série Matemática*, volume 2, número 20, 2008.

BEZERRA, Natalia. *Biologia Pesqueira dos Tubarões martelo (Sphyrna SPP.) no oceano, Atlântico Sudoeste e Equatorial*. 20 de fevereiro de 2017. 129. Tese de Doutorado na área da Oceanografia- PPGO- UFPE, Pernambuco, 20 de fevereiro.

BRESSAN, Paulo et al; *Fauna Ameaçada do Estado de São Paulo: Vertebrados*. São Paulo: Fundação Parque Zoológico de São Paulo: Secretaria do Meio Ambiente.2009.

CORRÊA, Jorge et al; Equações Diferenciais Ordinárias: Teoria básica e aplicações com o uso do Maple. 1ª Edição. Local: Clube de Autores, 2016. 265p.

EQUIPE EDITORIAL DE CONCEITO.de... Título disponível em: <<https://conceito.de/modelo-matematico>>. Acesso em: 02/03/2023.

JOACIR, Eder. Educação matemática crítica e modelagem matemática: uma proposta de atividade para sala de aula. Research, Society and Development, volume 11, número 13, 03/10/2022.

KOTAS, Jorge. Dinâmica de populações e pesca do tubarão-martelo *Sphyrnalewini* (Griffith & Smith, 1834), capturado no mar territorial e zona econômica exclusiva do sudeste-sul do Brasil. 2004. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 377 p.

LESSA, R.; Vooren, C. M.; Araújo, M. L. G.; Kotas, J. E.; Almeida, P. C.; Filho, R. G.; Santana, F. M.; Gadig, O. B. & Sampaio, C. 2005. Plano nacional de ação para a conservação e o manejo dos estoques de peixes elasmobrânquios no Brasil. Disponível em: Acessado em: 01 dezembro 2016.

NIEMEYER, Fernando. Monitoramento de pescarias industriais de arrasto-de-fundo por meio de observadores científicos na Plataforma Continental e Talude do Sul do Brasil entre 2015 e 2017. Biodiversidade e Conservação Marinha, Revista CEPSUL, volume 10, páginas 1-90, 16/11/2021.

RUFINO, Eduardo. Título Disponível em <<https://www.ufrgs.br/faunadigitalrs/sphyrnalewini-tubarao-martelo-recortado/>> . Acesso em: 02/03/2023

ZHANG, Hua et al. The Application of the Gompertz Model in Teaching Financial Mathematics: A Classroom Investigation. Journal of Mathematics Education at Teachers Colleg, volume 11, número 2, 24-33, 2020.