

A CONSTRUÇÃO DE UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO DOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Antonio Cerino Dias Cohen Ferreira¹
Cleidison da Silva Santos²

RESUMO: Este artigo científico apresenta uma abordagem dinâmica sobre o processo de construção dos sólidos de Arquimedes a partir dos poliedros de Platão, com o suporte instrumental do software de matemática dinâmica GeoGebra. O tema central investiga a carência de materiais pedagógicos interativos que ilustrem detalhadamente as transformações espaciais aplicadas à geometria tridimensional. O problema de pesquisa delineado busca responder como os processos geométricos de truncatura, expansão e snubificação podem ser simulados e visualizados dinamicamente de forma a reduzir a abstração inerente à Geometria Espacial. O objetivo geral deste artigo é descrever e fundamentar matematicamente o processo de obtenção dinâmica dos treze sólidos de Arquimedes utilizando recursos do GeoGebra Clássico 5, revelando a lógica construtiva e os cálculos dedutivos exatos que regem essas transições geométricas. A metodologia adota caráter de pesquisa aplicada, com abordagem quali-quantitativa, fundamentada em pesquisa bibliográfica clássica e modelagem computacional. Os estudos evidenciam que o uso estratégico de controles deslizantes e animações vetoriais no GeoGebra Clássico 5 permite uma percepção tátil-visual das conexões matemáticas, tornando o ensino mais humanizado e acessível. Conclui-se que a convergência entre história da matemática, rigor dedutivo e tecnologias de modelagem computacional abre novos horizontes metodológicos, estimulando o raciocínio espacial abstrato e a intuição geométrica na educação básica e superior.

Palavras-chave: Geometria Espacial. Poliedros de Arquimedes. GeoGebra.

1

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Espacial constitui um dos ramos mais sólidos e visualmente impactantes da matemática, atuando como uma linguagem universal que decodifica o espaço que habitamos. Desde o projeto arquitetônico mais arrojado até as menores estruturas moleculares, as formas poliédricas cercam e organizam o cotidiano do ser humano (Ferreira, 2019). Contudo, na prática educacional de ensino de matemática, a transição entre a geometria plana bidimensional e a complexidade tridimensional da geometria espacial costuma impor severas barreiras cognitivas aos estudantes. Essa transição exige um alto nível de abstração mental e uma visão espacial altamente desenvolvida, capacidades que raramente são estimuladas por métodos pedagógicos

¹ Cursando Especialização em Ensino de Ciências e Matemática no Instituto Federal do Pará de Educação – IFPA (Campus Santarém). Professor da Secretaria Municipal de Educação – SEMED – Santarém, PA. Licenciatura Integrada em Matemática e Física pela Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA (Santarém).

² Professor do Instituto Federal de Educação – IFPA, Campus Santarém. Doutor em Educação pela Universidad Nacional de Rosario e Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG. Pós-doutorado pela Universidad Nacional del Río Negro, Patagônia.

exclusivamente estáticos ou baseados em representações planas no quadro, ou em livros didáticos.

Neste contexto, surge o interesse pelos poliedros de Arquimedes, também conhecidos como poliedros semirregulares. Estes sólidos representam uma evolução conceitual sofisticada a partir dos cinco poliedros regulares de Platão (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Enquanto os sólidos platônicos exibem total simetria em suas faces congruentes, os sólidos arquimedianos introduzem a diversidade poligonal em suas faces, mantendo, no entanto, a congruência e regularidade em seus vértices. O estudo dessas propriedades não é apenas de relevância geométrica intrínseca, mas oferece um campo experimental riquíssimo para a exploração de transformações métricas e espaciais no ambiente virtual (Sá; Rocha, 2012).

Este artigo tem como problema de pesquisa central a seguinte indagação: de que maneira as tecnologias digitais de geometria dinâmica, especificamente o software livre GeoGebra, podem subsidiar a representação compreensível das relações métricas de translação, rotação e truncamento na transição dos poliedros de Platão para os sólidos de Arquimedes? O objetivo geral deste artigo é descrever e fundamentar matematicamente o processo de obtenção dinâmica dos treze sólidos de Arquimedes utilizando recursos do GeoGebra Clássico 5, revelando a lógica construtiva e os cálculos dedutivos exatos que regem essas transições geométricas. Como objetivos específicos, este trabalho busca: (a) resgatar a perspectiva histórica e cultural do desenvolvimento dos poliedros, humanizando a biografia de seus proponentes históricos; (b) deduzir analiticamente as distâncias e ângulos de corte e movimentação das faces; e (c) compartilhar metodologias de programação computacional geométrica por meio da criação de ferramentas customizadas no GeoGebra (Ferreira, 2019).

A justificativa para este trabalho está pautada na constatação de que o ensino atual de matemática necessita de abordagens mais visuais e exploratórias, que caminhem em consonância com as ferramentas digitais da modernidade. Oferecer aos professores e estudantes a oportunidade de experimentar e ‘construir as construções’ em um aplicativo interativo rompe com a passividade pedagógica tradicional. Assim, este artigo está estruturado de forma a conduzir o leitor por uma jornada lógico-histórica: inicia-se com a fundamentação bibliográfica sobre os grandes matemáticos da Antiguidade e da Renascença; apresenta-se a metodologia aplicada à pesquisa; descreve-se detalhadamente a matemática analítica subjacente aos processos de truncatura, expansão e snubificação; expõe-se a implementação instrumental no GeoGebra; e finaliza-se com as considerações e referências que consolidam esta investigação.

2 GRANDES MATEMÁTICOS E OS POLIEDROS

Para compreender a evolução das formas geométricas tridimensionais, faz-se necessário revisitar a história e a herança intelectual deixada pelos pensadores que dedicaram suas vidas para estudar as propriedades espaciais. O fascínio humano pelos poliedros é ancestral; evidências arqueológicas indicam o conhecimento empírico dessas formas pelos egípcios e neolíticos muito antes de sua formalização teórica (Boyer, 2012). No entanto, foram os matemáticos e filósofos da Grécia Antiga que conferiram aos sólidos um estatuto racional, investigando-os sob o prisma da simetria, da harmonia cósmica e da perfeição dedutiva.

2.1 Platão e os Poliedros Convexos Regulares

Arístocles, imortalizado na história sob o pseudônimo de Platão (c. 428 – c. 347 a.C.), foi o filósofo ateniense responsável por consolidar a associação dos sólidos convexos regulares aos elementos formadores do Universo. Em sua clássica obra dialógica intitulada *Timeu*, Platão descreve detalhadamente os cinco poliedros convexos regulares que hoje levam seu nome (Ferreira, 2019). Cada sólido foi associado misticamente a uma substância primordial: o tetraedro, por sua estrutura pontiaguda e ágil, foi associado ao fogo; o octaedro, ao ar; o icosaedro, à água; e o cubo, estável e robusto, à terra (Eves, 2004). O dodecaedro, que gerava uma dificuldade conceitual por ser o quinto elemento, foi associado misticamente ao Universo inteiro ou à quinta-essência que costura os céus.

Sob a ótica do rigor dedutivo, as propriedades geométricas essenciais que definem um sólido platônico exigem que todas as suas faces sejam polígonos regulares congruentes entre si e que de cada vértice parta o mesmo número de arestas (Sartor, 2013). Embora Platão tenha imortalizado a associação filosófica desses objetos, atribui-se a Teeteto (c. 417 a.C. – c. 369 a.C.) a primeira demonstração matemática de que existem somente cinco poliedros convexos regulares e que é impossível haver um sexto (Oliveira, 2012). Esta demonstração foi posteriormente imortalizada por Euclides de Alexandria no Livro XIII de sua obra *Os Elementos*, estabelecendo uma das primeiras sistematizações axiomáticas da geometria espacial de que se tem registro.

2.2 Um Pouco sobre Arquimedes

Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) é amplamente reconhecido como o maior matemático da Antiguidade e um dos maiores cientistas de todos os tempos. Sua mente singular

unia a genialidade teórica à incrível inventividade mecânica, criando máquinas de defesa bélica que mantiveram o exército romano em xeque durante o cerco à cidade de Siracusa comandado pelo general Marcelo (Plutarco, 2008). O nome ‘Arquimedes’ carrega uma profunda semântica: derivado de arché (princípio ou causa original) e mēdos (mente ou pensamento), pode ser lido da direita para a esquerda na tradição helênica como ‘a mente do princípio’ (Netz; Noel, 2007). Esta definição traduz perfeitamente sua busca incessante pelos fundamentos lógicos das grandezas físicas e geométricas.

Além de suas célebres contribuições no cálculo de áreas e volumes — como a icônica razão entre o cilindro e a esfera inscrita, que ele solicitou que fosse esculpida em seu próprio túmulo (Torres apud Assis, 2008) — Arquimedes debruçou-se intensamente sobre os poliedros semirregulares. Embora o tratado original escrito por ele sobre o assunto tenha se perdido ao longo dos séculos nos sucessivos incêndios da Biblioteca de Alexandria, sabemos de sua autoria graças aos escritos de Pappus de Alexandria (século III d.C.), que no Livro V de sua Coleção Matemática detalha os treze sólidos convexos semirregulares descritos originalmente pelo sábio de Siracusa (Moreira, 2017).

2.3 Poliedros Semirregulares

Os poliedros semirregulares, que convencionamos chamar de sólidos de Arquimedes, são corpos tridimensionais convexos constituídos por dois ou mais tipos de polígonos regulares, sob a condição estrita de que seus vértices sejam isometricamente equivalentes. Isso significa que, se aplicarmos uma isometria espacial, qualquer vértice pode ser mapeado em qualquer outro sem que a estrutura mude sua orientação espacial. Se excluirmos os prismas e antiprismas regulares (que teoricamente também possuem faces regulares e vértices uniformes, mas constituem famílias infinitas), existem exatamente treze sólidos arquimedianos convexos (Melo, 2014).

A retomada desses estudos na era moderna deve-se essencialmente ao astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630). Em sua monumental obra *Harmonices Mundi* (1619), Kepler redescobriu e sistematizou matematicamente os treze sólidos, batizando cada um deles de acordo com os procedimentos operacionais de truncatura e modificação que lhes dão origem (Oliveira, 2012). Para facilitar a visualização sistemática dessas treze estruturas tridimensionais, apresenta-se o Quadro 1, organizando-os conforme suas faces, vértices e processos genéticos associados.

Quadro 1 – Propriedades métricas dos sólidos de Arquimedes. Abreviações de faces: T (triângulos), Q (quadrados), P (pentágonos), H (hexágonos), O (octógonos), D (decágonos)

Nome do Sólido	Nº de Faces	Nº de Vértices	Nº de Arestas	Processo de Origem
Tetraedro Truncado	8 (4T, 4H)	12	18	Truncatura do Tetraedro
Cubo Truncado	14 (8T, 6O)	24	36	Truncatura do Cubo
Octaedro Truncado	14 (6Q, 8H)	24	36	Truncatura do Octaedro
Dodecaedro Truncado	32 (20T, 12D)	60	90	Truncatura do Dodecaedro
Icosaedro Truncado	32 (12P, 20H)	60	90	Truncatura do Icosaedro
Cuboctaedro	14 (8T, 6Q)	12	24	Truncatura profunda no Cubo/Octaedro
Icosidodecaedro	32 (20T, 12P)	30	60	Truncatura profunda no Dodecaedro/Icosaedro
Rombicuboctaedro	26 (8T, 18Q)	24	48	Expansão do Cubo/Octaedro
Rombicosidodecaedro	62 (20T, 30Q, 12P)	60	120	Expansão do Dodecaedro/Icosaedro
Cuboctaedro Truncado	26 (12Q, 8H, 6O)	48	72	Truncatura no Cuboctaedro
Icosidodecaedro Truncado	62 (30Q, 20H, 12D)	120	180	Truncatura no Icosidodecaedro
Cubo Snub	38 (32T, 6Q)	24	60	Snubificação do Cubo
Dodecaedro Snub	92 (80T, 12P)	60	150	Snubificação do Dodecaedro

Fonte: Elaborado pelos autores (2026).

A explicitação dessas treze estruturas evidencia a riqueza combinatória dos sólidos arquimedianos, obtidos a partir de três processos geométricos fundamentais: truncatura, expansão e snubificação, cujas deduções matemáticas serão detalhadas nas seções seguintes deste artigo.

2.4 Poliedros de Catalan

O estudo geométrico dos sólidos arquimedianos abriu caminho para a descoberta de seus correspondentes duais, conhecidos como sólidos de Catalan, em homenagem ao matemático belga Eugene Charles Catalan (1814-1894). O conceito de dualidade em poliedros repousa na reciprocidade espacial: ao tomarmos os centros de gravidade das faces de um poliedro original (tipo A) e os conectarmos por meio de novos segmentos retilíneos, obtemos um novo poliedro

dual (tipo B) (Ferreira, 2019). Repetir este processo de dualização no tipo B reverte a forma de volta à estrutura original do tipo A, preservando características fundamentais como o número de arestas, enquanto os números de vértices e faces se invertem (Sartor, 2013).

Enquanto os sólidos de Arquimedes possuem vértices uniformes e faces não uniformes, os sólidos de Catalan possuem a propriedade exatamente inversa: suas faces são uniformes (todas congruentes entre si), mas seus vértices não são uniformes, visto que diferentes números de arestas concorrem em cada vértice. Além disso, as faces dos sólidos de Catalan não são polígonos regulares, embora todos os seus ângulos diédricos sejam idênticos. A existência de treze poliedros de Arquimedes implica na existência de exatamente treze sólidos de Catalan duais (Ferreira, 2019).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A condução de uma investigação acadêmica consistente requer o delineamento rigoroso das diretrizes metodológicas que orientam as tomadas de decisão teóricas e práticas. Com isso, busca-se garantir a reprodutibilidade e a validade conceitual dos resultados obtidos, oferecendo ao leitor um mapa detalhado das etapas seguidas para a resolução do problema proposto na introdução deste estudo.

3.1 Classificação da Pesquisa

Esta pesquisa classifica-se, quanto à sua finalidade e natureza, como uma pesquisa aplicada. De acordo com os conceitos metodológicos vigentes, a pesquisa aplicada busca gerar conhecimentos novos voltados à resolução de problemas específicos e de interesse prático local (Severino, 2007). No caso desta investigação, o problema prático consiste na carência de materiais pedagógicos virtuais tridimensionais interativos, superada com o desenvolvimento das construções geométricas interativas disponíveis no site do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Quanto à abordagem do problema de pesquisa, adotou-se uma abordagem qualitativa. O caráter quantitativo evidencia-se no rigor matemático dedutivo necessário para calcular as distâncias exatas de corte nas arestas e os ângulos de rotação das faces tridimensionais. Por outro lado, a dimensão qualitativa manifesta-se na análise descritiva e interpretativa do percurso heurístico e do processo criativo de modelagem geométrica (Lakatos; Marconi, 2009). Esta articulação é fundamental para humanizar a matemática, transformando as fórmulas matemáticas e o código em elementos sensoriais e pedagógicos interativos.

3.2 Procedimentos de Coleta de Dados

Os procedimentos técnicos adotados apoiaram-se essencialmente em dois pilares: a pesquisa bibliográfica e a modelagem computacional (pesquisa experimental). A pesquisa bibliográfica fundamentou-se em consultas sistemáticas a livros clássicos de história da matemática, teses de doutorado, dissertações e artigos científicos especializados no ensino de geometria (Severino, 2007). Foram priorizados autores renomados como Eves, Boyer, Garbi e Eneil, assegurando a solidez do embasamento histórico e conceitual.

A modelagem computacional desenvolveu-se experimentalmente no ambiente virtual do GeoGebra Clássico 5. A escolha por este software de código aberto justifica-se por sua ampla acessibilidade multiplataforma e por sua alta robustez para processar álgebra e geometria espacial integradas (Ferreira, 2019). Durante o processo experimental de construção, os dados numéricos de teste foram manipulados diretamente na Janela de Visualização 3D. Desses dados, alguns foram deduzidos por meio de cálculos feitos usando projeções ortogonais dos próprios poliedros, como, por exemplo, o cubo. Outros dados foram encontrados por meio de tentativas e erros (aproximações) e pesquisa feita durante o processo de construção, como foi o caso dos snubs. Vejamos esses processos nas próximas seções.

4 O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DINÂMICA DOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

7

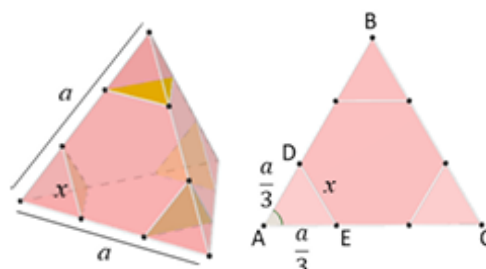
O núcleo do desenvolvimento deste trabalho centra-se no desvelamento dos processos matemáticos que permitem transitar do equilíbrio dos sólidos de Platão para a simetria semirregular dos poliedros de Arquimedes. Estes processos dividem-se em três métodos principais: truncatura, expansão e snubificação. Apresentamos as deduções lógicas e algébricas que validam a precisão destas transformações, bem como sua implementação instrumental no software GeoGebra Clássico 5.

4.1 Poliedros Obtidos por Truncatura

O processo de truncatura consiste na extração de partes de um poliedro por meio de planos de corte precisos que intersectam suas arestas adjacentes a cada vértice (Sá; Rocha, 2012). Para que o poliedro resultante da truncatura seja de fato um sólido de Arquimedes semirregular, todas as suas arestas finais devem possuir exatamente o mesmo comprimento. No caso de

poliedros cujas faces originais são triângulos equiláteros — como o tetraedro, o octaedro e o icosaedro —, a determinação dos pontos de corte é direta.

Figura 1 – Ilustração do tetraedro com as marcações de truncatura dos vértices



Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Para um tetraedro regular de aresta a , se marcarmos pontos nas arestas adjacentes a cada vértice que distem exatamente $a/3$ desse vértice, e efetuarmos os planos de corte por esses pontos, as arestas das faces recortadas e as arestas restantes das faces originais terão todas a mesma medida ($a/3$) (Ferreira, 2019), como mostra a Figura 1. Este mesmo raciocínio aplica-se ao octaedro truncado e ao icosaedro truncado. Na Figura 2 podemos visualizar a transformação do icosaedro.

8

Figura 2 – Truncatura do icosaedro



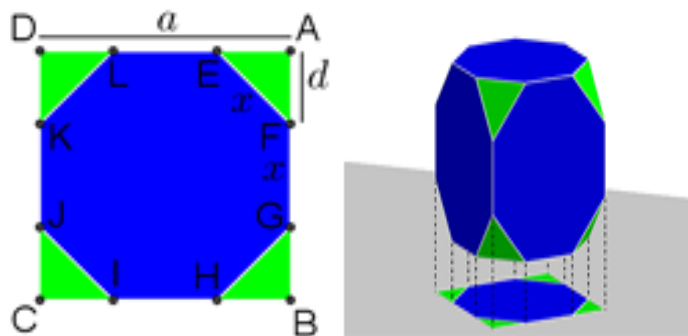
Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Contudo, quando as faces originais do sólido platônico possuem quatro ou mais lados, a distância de corte d do vértice não pode ser meramente linear (como $a/3$). Tomemos o caso do cubo truncado, obtido de um cubo regular de aresta a .

Ao realizarmos a truncatura de seus oito vértices, as faces quadradas do cubo devem se transformar em octógonos regulares de aresta x . Ao fazermos a projeção ortogonal de uma das

faces do cubo truncado no plano, identificamos um quadrado ABCD circunscrito ao octógono regular (Ferreira, 2019). Veja a Figura 3.

Figura 3 – Projeção ortogonal do cubo truncado e sua representação no plano



Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Definindo d como a distância do vértice do quadrado original até o ponto de corte mais próximo, e x como o lado do octógono como mostra a Figura 3, estabelecemos a relação geométrica elementar:

$$d = (a - x) / 2 \quad (1)$$

Sabendo que os cantos recortados formam triângulos retângulos isósceles cujos catetos medem d e a hipotenusa mede x (que corresponde ao lado do octógono), aplicamos diretamente o Teorema de Pitágoras no triângulo reto:

$$x^2 = d^2 + d^2 = 2d^2 \quad (2)$$

Substituindo a Equação (1) na Equação (2), obtemos uma equação quadrática em função da variável x e do parâmetro a :

$$x^2 + 2ax - a^2 = 0 \quad (3)$$

Resolvendo esta equação do segundo grau por meio da fórmula de Bhaskara, descartamos a raiz negativa por incompatibilidade de dimensão física geométrica, isolando apenas a raiz real positiva:

$$x = -a + a\sqrt{2} \quad (4)$$

Finalmente, ao inserirmos o valor exato de x deduzido na Equação (4) de volta na relação inicial expressa na Equação (1), encontramos a distância exata de truncatura d para o cubo truncado:

$$d = (2a - a\sqrt{2}) / 2 \quad (5)$$

Para o caso do dodecaedro truncado, que possui faces pentagonais regulares, Figura 4, a distância d de corte deve transformar os pentágonos em decágonos regulares de lado x .

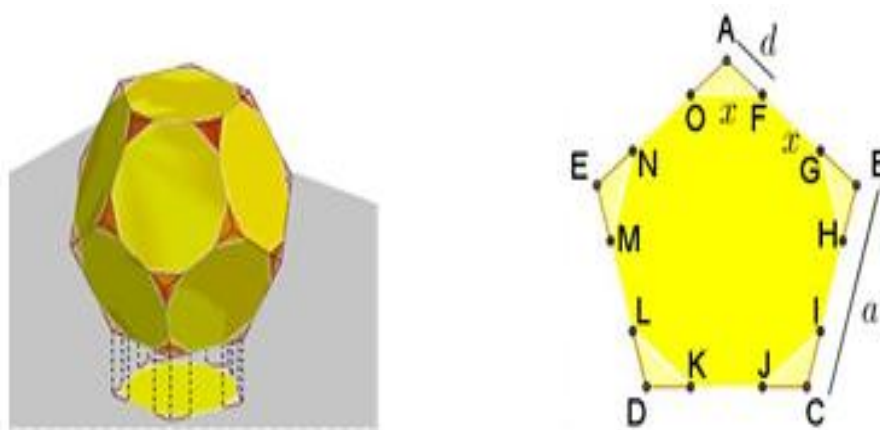
Figura 4 – Truncatura do dodecaedro



Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Projetando uma de suas faces no plano, obtemos um pentágono regular de aresta a com cantos truncados gerando triângulos isósceles de lados d e base x , Figura 5.

Figura 5 – Projeção ortogonal de uma face do dodecaedro truncado e sua representação



Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Sabendo que o ângulo interno de um pentágono regular mede exatamente 108° , aplicamos a Lei dos Cossenos ao triângulo isósceles formado nos vértices truncados (Ferreira, 2019):

$$x^2 = d^2 + d^2 - 2dd\cos(108^\circ) = 2d^2(1 - \cos(108^\circ)) \quad (6)$$

Substituindo $d = (a - x) / 2$ na Equação (6) e expandindo algebricamente, deparamo-nos com a equação quadrática:

$$(1 + \cos(108^\circ))x^2 + (2a - 2a\cos(108^\circ))x + a^2(\cos(108^\circ) - 1) = 0 \quad (7)$$

Ao calcularmos o discriminante delta, que resulta em $8a^2(1 - \cos(108^\circ))$, obtemos um valor estritamente positivo visto que $\cos(108^\circ)$ é negativo. A raiz estritamente positiva que resolve o problema métrico assume a seguinte forma:

$$x = (a\cos(108^\circ) - a + a\sqrt{2(1 - \cos(108^\circ))}) / (1 + \cos(108^\circ)) \quad (8)$$

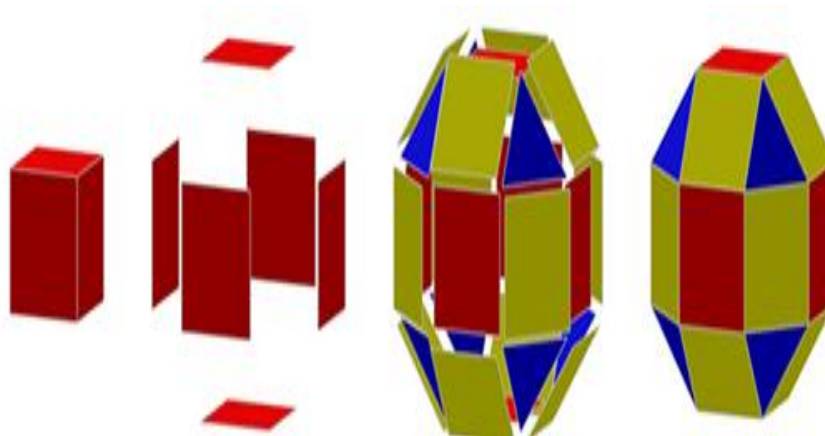
Ao substituirmos este valor de x na relação linear $d = (a - x) / 2$, encontramos a distância exata de truncatura d em função apenas do comprimento da aresta original do dodecaedro a:

$$d = (2a - a\sqrt{2(1 - \cos(108^\circ))}) / (2 \cdot (1 + \cos(108^\circ))) \quad (9)$$

4.2 Poliedros Obtidos por Expansão

O processo de expansão consiste no afastamento simétrico das faces de um poliedro regular a uma determinada distância em relação ao centro de gravidade do sólido, mantendo o paralelismo com suas posições originais. O espaço vazio resultante deste afastamento espacial é preenchido com polígonos regulares adicionais que conectam as faces expandidas (Ferreira, 2019).

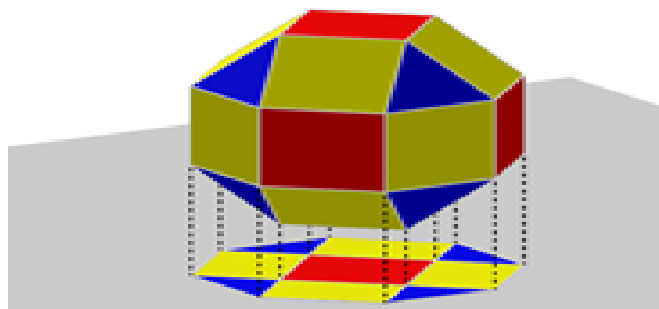
Figura 6 – Rombicuboctaedro obtido por expansão no cubo



Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

No caso do rombicuboctaedro (Figura 6), obtido por meio da expansão das faces quadradas de um cubo de aresta a, a distância d de translação radial de cada face até sua posição final pode ser deduzida projetando ortogonalmente o sólido no plano (Figura 7).

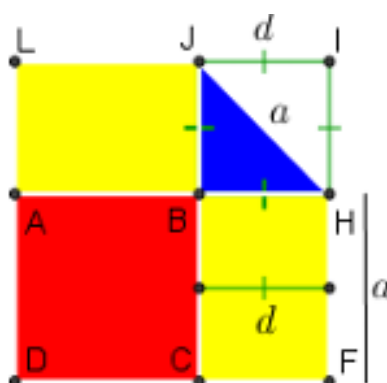
Figura 7 – Projeção ortogonal do rombicuboctaedro



Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Essa projeção revela um quadrado maior que circunscreve a silhueta projetada do sólido, onde se pode isolar um quadrado retângulo de lado d , cuja diagonal corresponde exatamente ao comprimento da aresta do sólido expandido, que deve medir a (Figura 8).

Figura 8 – Parte da projeção do rombicuboctaedro ampliada



Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Pela relação trigonométrica da diagonal de um quadrado ($a = d\sqrt{2}$), isolamos o valor exato do deslocamento de expansão:

$$d = (a\sqrt{2}) / 2 \quad (10)$$

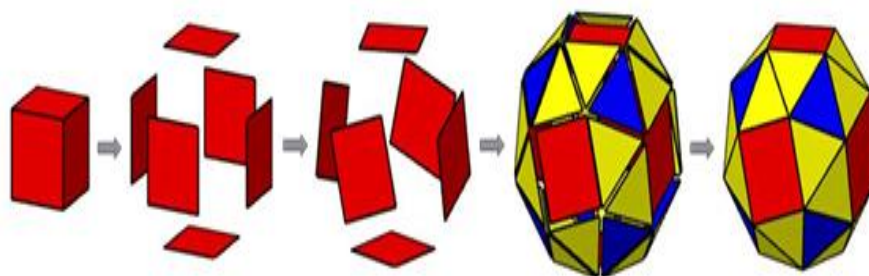
Para obter o cuboctaedro truncado por meio da expansão de um cubo previamente truncado de aresta a , a distância d' de afastamento das faces octogonais em relação ao contorno original é equivalente à própria distância d calculada para o truncamento do cubo. Assim, as faces octogonais são expandidas exatamente a uma distância d' expressa algebricamente por:

$$d' = (2a - a\sqrt{2}) / 2 \quad (11)$$

4.3 Poliedros Obtidos por Snubificação

O processo de snubificação representa a transformação mais complexa dentre as modificações arquimedianas. Ela consiste em afastar as faces de um polígono regular (similarmente ao processo de expansão) e, antes de preencher os espaços vazios com triângulos equiláteros, realizar uma rotação coordenada dessas faces por um ângulo específico ao redor do eixo radial correspondente (Ferreira, 2019).

Figura 9 – Cubo snub obtido de um cubo



Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Devido à complexidade de acoplamento espacial das rotações e translações, as soluções analíticas exatas envolvem equações de grau elevado (algumas de terceiro grau). Por esse motivo, muitas construções computacionais apoiam-se em aproximações decimais de alta precisão obtidas heurísticamente por modeladores geométricos. Na construção do cubo snub (Figura 9) de aresta a , as faces quadradas do cubo original devem ser afastadas a uma distância radial de aproximadamente $0,64a$ e, concomitantemente, rotacionadas por um ângulo plano de aproximadamente $16,5^\circ$. No caso do dodecaedro snub, as faces pentagonais originais devem sofrer um deslocamento linear de aproximadamente $0,87a$, seguido de uma rotação simétrica coordenada de cerca de $13,1^\circ$, preenchendo-se as lacunas espaciais com triângulos equiláteros congruentes (Ferreira, 2019).

4.4 Construções por Truncatura no GeoGebra

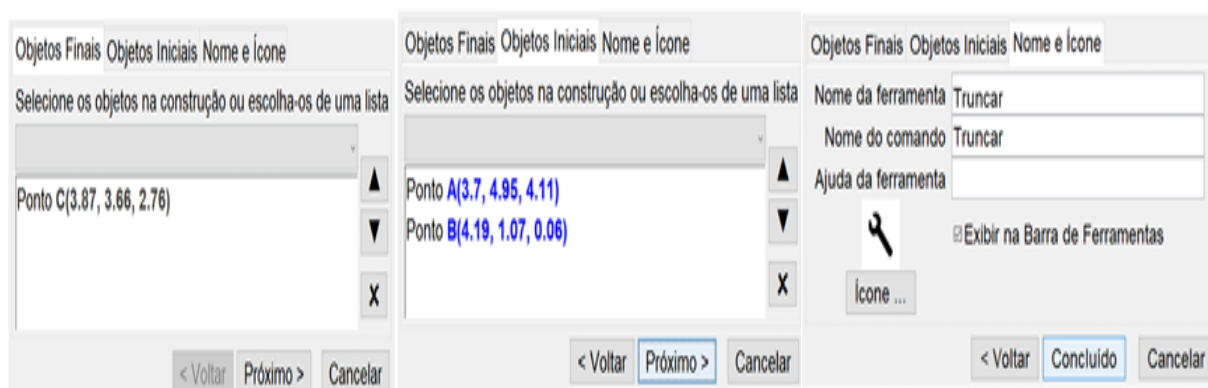
Uma das grandes virtudes do software de matemática dinâmica GeoGebra Clássico 5 é a sua capacidade de unificar a rigidez da álgebra analítica à plasticidade visual da geometria interativa. Nas subseções seguintes, descrevemos de que forma as deduções matemáticas apresentadas anteriormente foram traduzidas em rotinas operacionais e comandos específicos no GeoGebra, permitindo criar simulações animadas do truncamento, expansão e snubificação.

Para ilustrar o processo de truncatura no ambiente tridimensional do GeoGebra, adotou-se o tetraedro truncado como modelo conceitual. Inicialmente, o tetraedro regular de referência é criado no espaço de visualização 3D por meio do comando de entrada ‘Tetraedro(<Ponto>, <Ponto>)’. Para simular os planos de corte a exatamente $1/3$ da aresta em relação aos vértices, optou-se pela criação de uma nova ferramenta customizada, o que simplifica e otimiza a rotina operacional da construção (Ferreira, 2019).

A lógica para criação desta ferramenta consiste em criar dois pontos quaisquer A e B que formam um segmento de aresta de referência. No campo de entrada do software, digita-se a expressão vetorial $C = A + \text{Vetor}(A, B) / 3$ para criar um ponto intermediário C.

Acessando o menu superior do GeoGebra na sequência ‘Ferramentas’ -> ‘Criar uma Nova Ferramenta’, abre-se uma caixa de diálogo contendo três abas. Na aba ‘Objetos Finais’, declara-se o ponto C. Na aba ‘Objetos Iniciais’, declaram-se os pontos geradores de referência A e B. Na última aba, ‘Nome e Ícone’, batiza-se o novo comando com a palavra ‘Truncar’. Veja a Figura 10. Uma vez criada, esta macro-ferramenta fica integrada à barra de ferramentas do GeoGebra e pode ser chamada no campo de entrada para quaisquer pares de pontos, permitindo localizar rapidamente e com exatidão todos os pontos de truncamento nas arestas do tetraedro (Ferreira, 2019).

Figura 10 – Passos para criar uma ferramenta no GeoGebra

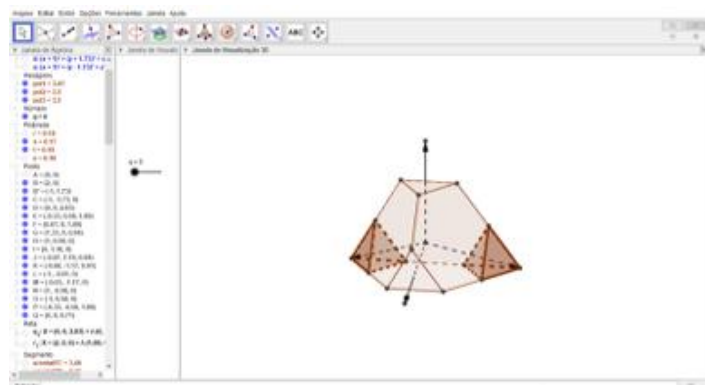


Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Ocultando o tetraedro original e mantendo os pontos demarcados ativos, utiliza-se a ferramenta ‘Polígono’ para desenhar manualmente as faces hexagonais e triangulares do tetraedro truncado. Para dotar o arquivo de um caráter dinâmico e interativo, cria-se um controle deslizante q variando de 0 a 1. Na sequência, constroem-se pirâmides nos cantos dos

vértices originais. Para simular o afastamento animado dessas pirâmides em direção externa, calcula-se o centro geométrico do tetraedro e constroem-se vetores direcionais ligando o centro aos quatro vértices. As pirâmides são transladadas radialmente de acordo com a movimentação do controle deslizante q , aplicando-se o comando `Transladar( <Objeto Pirâmide>, <Vetor Direcional>* $q$  )`. A Figura 11 ilustra essa dinâmica.

Figura 11 – Vetores construídos a partir do centro do tetraedro



Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

4.5 Construções por Expansão no GeoGebra

15

O rombicuboctaedro foi selecionado como o modelo de referência para demonstrar o processo de expansão dinâmica no GeoGebra. Primeiramente, criou-se um cubo regular no espaço tridimensional por meio do comando `Cubo( <Ponto>, <Ponto> )`. A translação das seis faces quadradas do cubo exige seu afastamento por uma distância exata $d = (a\sqrt{2})/2$ calculada teoricamente na Equação (10).

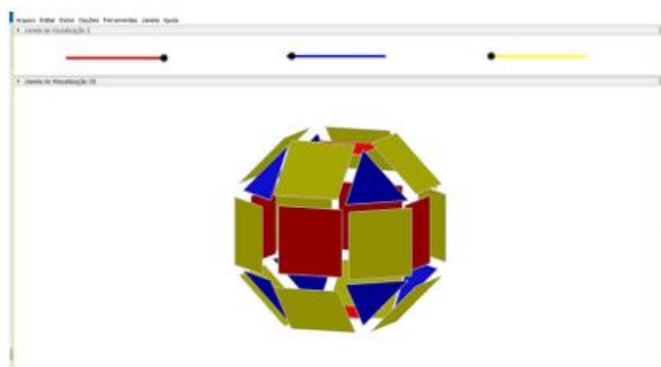
Para parametrizar e dar mobilidade a este movimento, cria-se um controle deslizante b variando no intervalo fechado de 0 a 1. Na sequência, desenvolve-se uma nova ferramenta customizada que gera o ponto de destino C a partir do centro do cubo (ponto A) e do centro da face correspondente (ponto B). A fórmula analítica inserida no campo de entrada do GeoGebra é configurada da seguinte maneira: $C = B + b\sqrt{2} \text{ Vetor}(A, B)$ (Ferreira, 2019).

Essa fórmula introduz mobilidade ao ponto C : quando $b = 0$, o ponto C coincide com o centro original da face B ; quando $b = 1$, o ponto C atinge a distância de deslocamento exata requerida no rombicuboctaedro. Após associar a translação das faces do cubo a essa ferramenta vetorial, criou-se o efeito de afastamento geométrico das seis faces. Com os novos pontos limites gerados pela translação, utiliza-se o comando `Vértices( <Polígono> )` para obter as coordenadas

dos vértices móveis, desenhando-se em seguida as faces triangulares e quadradas remanescentes com a ferramenta ‘Polígono’.

O refinamento do arquivo de simulação dinâmica é aprimorado ao condicionar-se o aparecimento dos controles deslizantes complementares (responsáveis pela aproximação e montagem das faces de preenchimento), Figura 12.

Figura 12 – O processo de expansão para obtenção do rombicuboctaedro



Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Para impedir a poluição visual da tela de simulação, acessam-se as propriedades dos controles deslizantes adicionais e, na aba ‘Avançado’, insere-se a expressão lógica ‘ $b = 1$ ’ no campo ‘Condição para Exibir Objeto(s)’. Desse modo, as ferramentas e comandos de montagem de preenchimento só aparecem na tela quando o movimento inicial de expansão das faces quadradas principais estiver completamente concluído ($b = 1$) (Ferreira, 2019).

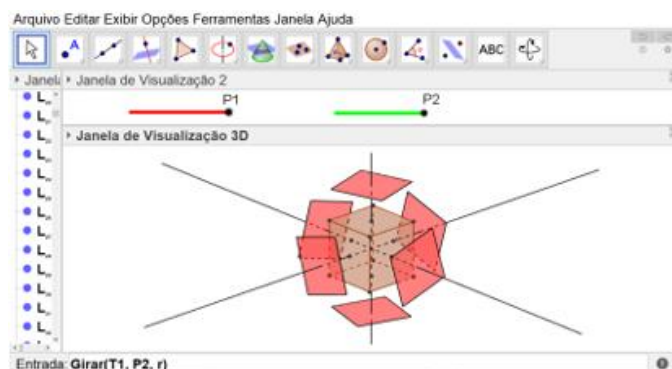
4.6 Construções por Snubificação no GeoGebra

Para a implementação da snubificação, toma-se a construção prévia de expansão e insere-se uma rotina de rotação das faces expandidas. Tomando o cubo snub como objeto de estudo (Figura 13), cria-se inicialmente a expansão de suas faces quadradas adotando a aproximação decimal $d = 0,64a$ determinada na subseção anterior. Para simular a rotação concomitante ao afastamento, cria-se um novo controle deslizante P_2 do tipo Ângulo, com limites definidos de 0° a $16,5^\circ$ (Ferreira, 2019).

Para efetuar a rotação das faces transladadas, faz-se necessária a definição de eixos de rotação espaciais específicos. Desenha-se uma reta r que passa de forma colinear pelo centro do cubo regular e pelo centro da face transladada correspondente. No campo de entrada do

GeoGebra, digita-se o seguinte comando para rotacionar dinamicamente a face quadrada T_1 : $\text{Girar}(T_1, P_2, r)$. Veja a Figura 13.

Figura 13 – A expansão e a rotação das faces de um cubo



Fonte: TCC: O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra (Ferreira, 2019).

Este mesmo procedimento é repetido para cada uma das seis faces quadradas, utilizando-se o mesmo controle deslizante P_2 . No entanto, para garantir que todas as faces rotacionem no mesmo sentido geométrico helicoidal, os sinais das variáveis dos ângulos devem ser configurados com orientações opostas para cada par de faces paralelas (por exemplo, uma face superior rotaciona a $+P_2$ enquanto a face inferior correspondente rotaciona a $-P_2$) (Ferreira, 2019). Concluído o movimento complexo de translação e rotação coordenada, preenchem-se as lacunas espaciais resultantes com trinta e dois triângulos equiláteros congruentes, obtendo-se a representação interativa final do cubo snub.

17

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste estudo permitiu evidenciar a enorme riqueza teórica e prática presente na transição geométrica dos poliedros regulares de Platão para os sólidos semirregulares de Arquimedes. Por meio do percurso dedutivo e lúdico construído, os objetivos delineados na introdução foram plenamente alcançados. Mapeou-se matematicamente as relações de distância de corte e translação de faces, materializando esses conceitos abstratos em treze construções tridimensionais interativas e dinâmicas que se encontram prontas e acessíveis ao público no repositório oficial do GeoGebra por meio do link <https://www.geogebra.org/m/wq4bhr gc> (Ferreira, 2019).

Um dos grandes méritos desta abordagem reside na humanização do ensino de matemática. Ao resgatar a biografia e os contextos históricos em que Platão, Arquimedes, Kepler e Catalan formularam suas teorias, retira-se da matemática o estigma de ciência fria e isolada de seu tempo, integrando-a ao fluxo cultural e criativo da humanidade. Além disso, a visualização em tempo real promovida pelo GeoGebra atua como um facilitador cognitivo de valor inestimável. Ela permite que o discente desenvolva intuições geométricas espaciais complexas antes de adentrar no rigor árido das demonstrações algébricas formais, cumprindo as premissas pedagógicas contemporâneas de inclusão e interatividade visual (Almeida, 2015).

Como proposta de trabalhos futuros, vislumbra-se a consolidação das treze construções tridimensionais dispersas em um livro dinâmico interativo unificado hospedado na própria plataforma do GeoGebra. Este recurso deve vir acompanhado de roteiros pedagógicos de exploração espacial passo a passo direcionados a professores do ensino básico e superior, sugerindo metodologias para explorar conceitos de simetria, cálculo de volumes, relações trigonométricas e dualidade tridimensional. Espera-se que esta pesquisa sirva como um pontapé inicial para que docentes e discentes se aventurem na modelagem dinâmica de suas próprias investigações, mantendo viva a chama da curiosidade matemática que nos move desde a Antiguidade (Ferreira, 2019).

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Talita Carvalho Silva de. *A Base de Conhecimento para o Ensino de Sólidos Arquimedianos*. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.
- ASSIS, André. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. São Paulo: Editora C.B., 2008.
- BATISTA, Sílvia. *Poliedros de Kepler-Poinsot*. Campos dos Goytacazes: IFF, 2019.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.
- CARVALHO, Benjamim de A. *Desenho Geométrico*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1958.
- CONTADOR, Paulo Roberto Martins. *Matemática, uma Breve História*. v. 1. São Paulo: Livraria da Física, 2012.
- DULCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar, 10: Geometria Espacial, Posição e Métrica*. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, Antonio Cerino Dias. *O Processo de Construção dos Poliedros de Arquimedes: Uma Visão Dinâmica a Partir do GeoGebra*. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Integrada em Matemática e Física) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2019.

GARBI, Gilberto Geraldo. *A Rainha das Ciências: um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. *Fundamentos da Metodologia Científica*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

MELO, Henrique S. *Os 13 Sólidos Arquimedianos*. 2014. Trabalho Acadêmico (Licenciatura em Matemática) – Universidade dos Açores, Ponta Delgada, 2014.

MOREIRA, Marli D. D. *Poliedros*. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 2017.

SÁ, Carlos Correia de; ROCHA, Jorge (org.). *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SARTOR, Nivaldo L. *O Universo dos Poliedros Regulares*. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2013.

SEVERINO, Antônio Joaquim. *Metodologia do Trabalho Científico*. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.