Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação — REASE

doi.org/10.51891/rease.v12i4.25634

EXPERIMENTO DA LEI DE VARIAÇÃO DE TEMPERATURA DE NEWTON NO COTIDIANO: PREPARO DE UM BOLO

EXPERIMENT BASED ON NEWTON'S LAW OF TEMPERATURE VARIATION IN EVERYDAY LIFE: PREPARING A CAKE

EXPERIMENTO BASADO EN LA LEY DE NEWTON SOBRE LA VARIACIÓN DE LA TEMPERATURA EN LA VIDA COTIDIANA: PREPARACIÓN DE UN PASTEL

Edilene Rocha Leal Fontalba Carrasco[1]
Ronaldo Campelo da Costa[2]
Haroldo Reis Alves de Macêdo[3]

RESUMO: Este trabalho aborda a Lei da variação de Temperatura de Newton, analisando as taxas de aquecimento ou resfriamento da temperatura de um corpo, considerando que é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e o ambiente. Logo, essa pesquisa tem como principal objetivo mostrar de forma empírica através do processo de assar um bolo a aplicabilidade das Equações Diferenciais Ordinárias na variação de temperatura do bolo. Para registrar esse processo foi colocado um termômetro, conectado a uma interface USB, durante o aquecimento do bolo no forno, obtendo-se a temperatura em relação ao tempo. Também analisou-se a variação de temperatura após o bolo sair do forno e quanto tempo ele levou para atingir a temperatura ambiente. Com os dados obtidos construímos os gráficos do aquecimento, resfriamento e da comparação do aquecimento e resfriamento do bolo. Em seguida foi usado o método de equações separáveis para formular a equação que descrevia o aquecimento e o resfriamento em qualquer tempo. Através desse trabalho é possível entender alguns conceitos termodinâmicos e relacionar com equações diferenciais, o que mostra que para a comprovação das leis teoria da física é necessário utilizar a matemática como ferramenta de auxílio para estruturar o pensamento físico.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Modelagem matemática. Variação de temperatura. Lei de Resfriamento de Newton

ABSTRACT: This work addresses Newton's Law of Temperature Variation, analyzing the rates of heating or cooling of a body's temperature, considering that it is proportional to the temperature difference between the body and the environment. Therefore, this research aims to empirically demonstrate, through the process of baking a cake, the applicability of Ordinary Differential Equations to the temperature variation of the cake. To record this process, a thermometer connected to a USB interface was placed in the oven while the cake was heating, obtaining the temperature in relation to time. The temperature variation after the cake left the oven and the time it took to reach room temperature were also analyzed. With the data obtained, graphs of heating, cooling, and a comparison of the heating and cooling of the cake were constructed. Then, the separable equations method was used to formulate the equation that described the heating and cooling at any time. Through this work, it is possible to understand some thermodynamic concepts and relate them to differential equations, which shows that to prove the laws of physics theory, it is necessary to use mathematics as a tool to help structure physical thought.

Keywords: Ordinary Differential Equations. Mathematical modeling. Temperature variation. Newton's Law of Cooling.

[1] Mestranda em Ensino de Física - IFPI polo 65 do MNPEF. Professora Efetiva da rede estadual de Pernambuco na EREM Moisés Bom de Oliveira.
[2] Doutor em Educação pela USP. Professor do Instituto Federal do Piauí Campus Picos.
[3] Doutor em Ciência e Engenharia de Materiais pela UFRN. Professor do Instituto Federal do Piauí Campus Teresina Central.

RESUMEN: Este trabajo aborda la Ley de Newton de Variación de Temperatura, analizando las tasas de calentamiento o enfriamiento de la temperatura de un cuerpo, considerando que es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el ambiente. Por lo tanto, esta investigación tiene como objetivo demostrar empíricamente, mediante el proceso de hornear un pastel, la aplicabilidad de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a la variación de temperatura del pastel. Para registrar este proceso, se colocó un termómetro conectado a una interfaz USB en el horno mientras el pastel se calentaba, obteniendo la temperatura en relación con el tiempo. También se analizó la variación de temperatura después de que el pastel saliera del horno y el tiempo que tardó en alcanzar la temperatura ambiente. Con los datos obtenidos, se construyeron gráficos de calentamiento, enfriamiento y una comparación del calentamiento y enfriamiento del pastel. Luego, se utilizó el método de ecuaciones separables para formular la ecuación que describe el calentamiento y enfriamiento en cualquier momento. A través de este trabajo, es posible comprender algunos conceptos termodinámicos y relacionarlos con ecuaciones diferenciales, lo que muestra que para probar las leyes de la teoría física, es necesario utilizar las matemáticas como herramienta para ayudar a estructurar el pensamiento físico.

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Modelado matemático. Variación de la temperatura. Ley de enfriamiento de Newton.

1 INTRODUÇÃO

Vários estudos que tratam da importância da relação da Matemática e a Física já foram realizados por diversos pesquisadores de ambas as áreas. Poincaré (1995), diz que é preciso que haja entre a Física e a Matemática uma colaboração mais íntima e que essas duas disciplinas se penetram mutualmente, e seu espirito é o mesmo. Pietrocola (2002), já havia afirmado que as medições Matemáticas são empregadas nas comprovações de leis e teorias da Física desempenhando funções estruturantes análogas ao esqueleto que dá sustentação ao corpo humano. As equações diferenciais são conceitos essenciais da Matemática bastante usados para estruturar e comprovar as leis e teorias da Física, pois oferece ferramentas Matemáticas para a modelação dos problemas Físicos. (SIMÕES, 2014).

Neste sentido, Silva (2010), reforça esse pensamento e fala que em situações que envolvem variações de temperatura de um corpo pode-se aplicar a lei do resfriamento de Newton através de uma modelagem matemática de equações diferenciais ordinárias. O autor também cita exemplo e diz que algumas propriedades do aço se dão através de um tratamento térmico que são importantes para aperfeiçoar o processo, permitido um maior rendimento e uma maior economia.

A mesma ideia é o caso do resfriamento de materiais biológicos para preservação, através da lei do resfriamento pode-se saber quanto tempo é necessário para resfriar algumas frutas em contato com a água gelada ou ar forçado até a temperatura necessária para o armazenamento. Também é possível determinar quanto tempo o leite deve permanecer dentro de um tanque de resfriamento em contato com uma parede inoxidável, para se obter a temperatura desejada, retardando os processos de crescimento de micróbios, evitando assim a perda do leite.

Além disso, ainda é possível determinar a hora aproximada em que uma pessoa veio a óbito, através de medições como a da temperatura ambiente, a temperatura do corpo, e a medição da variação da temperatura em tempos determinados.

Sob essa óptica o presente trabalho tem como objetivo contribuir para evidenciar a importância do estudo de modelagens matemáticas a partir das equações diferenciais ordinárias e da Lei do resfriamento de Newton durante o registro do processo de assar um bolo, onde foi determinado uma função através de equações separáveis para determinar o aumento da temperatura em função do tempo gasto para assar o bolo e o tempo necessário para o bolo atingir a temperatura ambiente após ser retirado do forno.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Equações Diferenciais

Segundo Barivieira (2017), as equações diferenciais são usadas para calcular variações em um sistema que podem ser elas relacionadas as mudanças de dimensões ou de medidas. Para Boice e Diprima (2002), as equações diferenciais estão ligadas ao desenvolvimento geral da matemática e não podem ser separadas dele, ainda segundo os pesquisadores as equações diferenciais começaram a se desenvolver no século XVII através dos estudos de cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wihelm Leibiniz (1646-1716).

Auxiliando também no desenvolvimento da Física, pois segundo Thomas (2013), foi de fundamental importância para o desenvolvimento das equações de movimento da mecânica newtoniana, das equações de onda da física ondulatória e do eletromagnetismo e, mais tarde, na formulação da mecânica quântica e da relatividade, ainda segundo ele o objetivo da modelagem é tentar encontrar qual é a variação das grandezas que caracterizam o problema tomando como principal parâmetro o tempo, extraindo assim informações relevantes para que se possível possa prever o comportamento das grandezas.

Já Zill e Cullen (2001), abordam que as palavras diferencial e equações remetem a algum problema cuja solução envolve derivadas, porém definem formalmente equações diferenciais como: “Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes.” (ZILL E CULLEN, 2001).

2.2 Equações Separáveis

Usou-se para a resolução do problema, conceitos e técnicas norteado pelos métodos das equações separáveis que para Diacu (2014), as equações separáveis são como uma mistura de óleo e água onde os líquidos se separam naturalmente, ele explica que a ideia do método é separar as duas variáveis x e t e em seguida integrar a uma nova equação. Brannan e Boyce (2013, p.45), apresentam da seguinte forma: primeiramente os autores usam um processo de investigação direta para resolver equações lineares de primeira ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay+b, \qquad \text{Eq. (1)}$$

Onde a e b são constantes, para os autores esse processo pode ser aplicado, a uma variedade muito grande de equações, o autor usa x ao invés de t como variável independente por duas razões, primeiro porque letras diferentes são utilizadas com frequência, para as variáveis em uma equação diferencial e, portanto, você não ficar acostumado com um único par. Em particular, x é muito usado para variáveis independentes. Além disso, o autor quis reservar t para outra coisa mais adiante. A equação geral de primeira ordem é,

$$\frac{dy}{dt}t = f(x,y) \qquad \text{Eq. (2)}$$

Considera-se equações lineares na seção procedente, mas se a Eq. (2) não for linear, então o método dos fatores integrantes não é aplicável. Considera-se aqui uma subclasse das equações de primeira ordem que podem ser desenvolvidas por integração direta.

Para identificar esta classe de equações, primeiro coloca-se a Eq. (2) na forma 4

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{Eq. (3)}$$

Sempre é possível fazer isso definindo $M(x,y) = -f(x,y)$ e $N(x,y) = 1$, mas também existe outras maneiras. Se acontecer que M só depende de x e que N só depende de y, então a Eq. (3) fica

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{Eq. (4)}$$

Uma tal equação é dita separável porque, se for escrita na forma diferencial,

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \qquad \text{Eq. (5)}$$

então, se almeja-se, as parcelas envolvendo cada variável podem ser separadas pelo sinal de igualdade. A forma diferencial (5) também é mais simétrica e tende a diminuir a diferença entre a variável independente e a dependente. Uma equação separável pode ser resolvida integrando-se as funções M e N.

2.3 Lei do Resfriamento e Aquecimento de Newton

Sousa (2007), introduz o pensamento sobre a Lei do resfriamento de Newton, destacando que Newton publicou anonimamente um artigo intitulado "*Scala Graduum Caloris*", em que descreve um método para medir temperaturas de até 1000 °C, algo impossível devido ao pouco conhecimento científico na época. O método estava baseado no que hoje é conhecido como a lei do resfriamento de Newton que diz que a taxa de diminuição da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e o ambiente, onde o mesmo método é utilizado para o aquecimento.

Em termos matemáticos, a lei de Newton do resfriamento pode ser escrita como:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad \text{Eq. (6)}$$

onde T é a temperatura do corpo, t é o tempo, k é uma constante e T_a é a temperatura ambiente. Resolvendo a equação 6, encontra-se como a temperatura depende do tempo:

$$T = T_a + (T_0 - T_a)\exp(-Kt) \quad \text{Eq. (7)}$$

onde T_o é a temperatura inicial do corpo. A lei do resfriamento de Newton é valida apenas aproximadamente. Ela pode ser aplicada com razoável sucesso em situações onde a temperatura do corpo não é muito diferente da temperatura ambiente e quando correntes de ar auxiliam o resfriamento (convexão forçada) quando a diferença de temperaturas é muito alta, a radiação térmica passa a ser importante. Nesse caso a lei de resfriamento pode ser generalizada, tornando-se:

$$\frac{dt}{dt} = -K(T - T_a) - K'(T^4 \; - {T_a}^4) \quad \text{Eq. (8)}$$

é uma constante. A equação acima não pode ser integrada analiticamente, mas não é difícil resolve-la numericamente com programas como o *Modellus*.

Para Hewitt (2011), se um objeto está com uma temperatura diferente do ambiente no qual ele está inserido ele consequentemente vai entrar em equilíbrio térmico com o sistema alcançando uma temperatura comum com ele, ou seja, um objeto relativamente quente esfria ao entrar em contato com uma vizinhança que está mais fria, ainda segundo o pesquisador a taxa de resfriamento desse objeto dependerá do quanto mais quente ele está em relação ao ambiente no qual ele está inserido. Ainda, para ele, alguma coisa perde energia interna para o exterior frio e depende da diferença entre as temperaturas interior e exterior, logo define a lei de Newton do resfriamento como a proporcionalidade entre a taxa de resfriamento a diferença de temperatura ΔT entre o objeto e o ambiente

METODOLOGIA

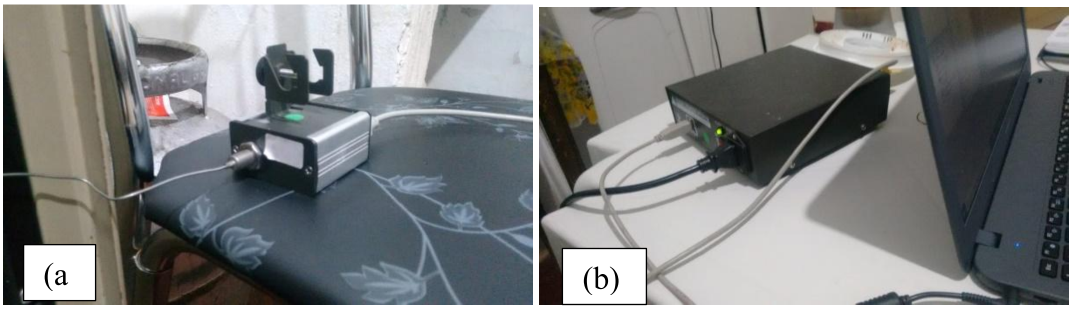
A pesquisa é de natureza qualitativa do tipo experimental, pois para a execução desse trabalho foi feito um bolo cujos ingredientes não serão citados, pois não faz parte do propósito do trabalho. Na figura 1 é mostrado um bolo sendo assado em um forno que foi preaquecido a 180°C por 10 minutos e logo em seguida assado a uma temperatura de 210°C.

Figura 1: Foto da montagem do experimento, bolo com termômetro (termopar)

Fonte: arquivo pessoal da autora (2019)

Em seguida foi colocado no bolo um termômetro sensor capaz de medir temperaturas de até 900°C (figura 2a). Logo após o termômetro foi conectado a uma interface USB que também era conectada ao notebook (figura 2b). Onde os dados adquiridos foram enviados para o notebook através da porta de comunicação USB.

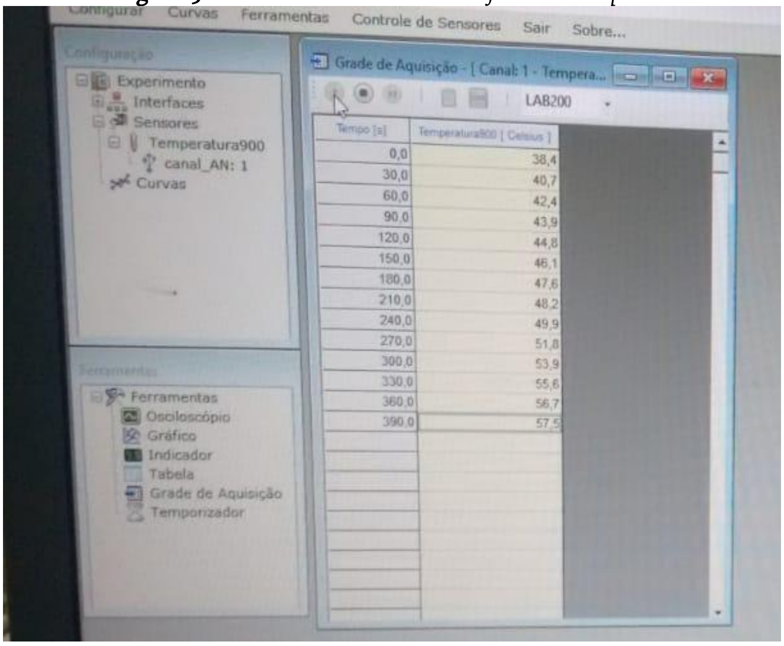
Figura 2: (a) Termômetro sensor e (b) interface USB para conexão com PC e leitura dos dados



Fonte: arquivo pessoal da autora (2019)

Para aquisição dos dados foi usando o *Software CidepeLab* no notebook (figura 3), que com suas diversas ferramentas e com a configuração adequada ao experimento recebeu os sinais da interface e mostrou a temperatura em relação ao tempo na tela instantaneamente. Também foi analisada a variação de temperatura após o bolo sair do forno e quanto tempo ele levou para atingir a temperatura ambiente. Logo após, com os dados foi feito os gráficos do aquecimento, resfriamento e da comparação do aquecimento e resfriamento do bolo. Em seguida foi usada o método de equações separáveis para formular a equação que descrevia o aquecimento e o resfriamento em qualquer tempo.

Figura 3: Print da tela inicial do *software CidepeLab*

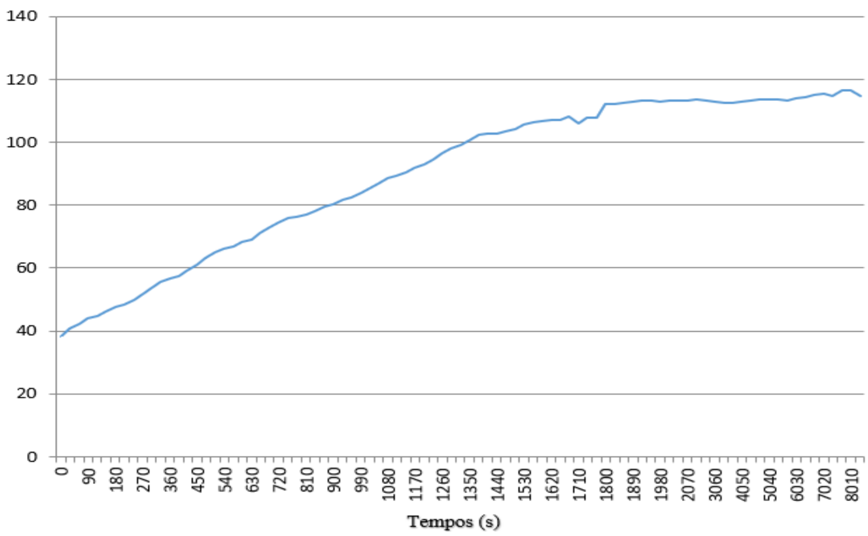


Fonte: arquivo pessoal da autora (2019)

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir dos dados obtidos durante a leitura da temperatura ao assar e resfriar o bolo, foi possível obter o gráfico apresentado na figura 4, que representa o aquecimento (temperatura x tempo)

Figura 4: Gráfico do aquecimento do bolo obtido através do acompanhamento em tempo real.



Fonte: dados da pesquisa (2019)

Analisando o gráfico percebe-se que após algum tempo aquecendo ele tende a se estabilizar e fica em uma temperatura aproximadamente constante. Logo vamos considerar que a temperatura $T(t)$ dependente do tempo e é a mesma em todos os pontos do corpo, também vamos considerar que a temperatura ambiente permanece constante ao logo da experiência, assim com os dados obtidos do gráfico do aquecimento do bolo foi possível elaborar a seguinte questão:

O bolo estava em uma temperatura ambiente de 38°C, pois o forno foi pré-aquecido a 180°C por 10 minutos, logo em seguida o bolo foi ao forno e ficou assando a uma temperatura e 210° C, logo usaremos equações separáveis para determinar a equação característica desse aquecimento onde através dela pode-se encontrar a temperatura em qualquer tempo.

Pela lei de Newton tem-se a seguinte equação:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

Sabemos que a temperatura ambiente é 38,4° C então fica:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 38{,}4)$$

Como essa equação é uma diferencial do tipo separável vamos separar as variáveis e integrar ambos os membros:

$$\int \frac{dT}{T - 38{,}4} = \int kdt$$

Resolvendo fica:

$$\ln|T - 38{,}4°| = kt + c$$

$$T - 38{,}4 = e^{kt+c}$$

$$T - 38{,}4 = e^{kt}e^{c}$$

Como e^c é uma constante chamaremos de C, logo fica:

$$T = 38{,}4 + Ce^{kt}$$

Resolvendo o Problema de Valor Inicial (PVI) para o tempo inicial igual a 0 (minutos) e a temperatura inicial igual a 210°C (temperatura indicada no fogão, o que difere um da temperatura real dentro do forno), vem: $T(0) = 210°C$ logo, fica:

$$210 = 38{,}4 + Ce^{k.0}$$

$$C = 171{,}6$$

Substituindo na equação vem:

$$T = 38 + 172e^{kt}$$

Aplicando novamente o PVI para $T(10) = 68°C$, obtém-se o valor da constante de proporcionalidade k.

Substituindo tem-se:

$$68 = 38{,}4 + 171{,}6e^{k.10}$$

$$29{,}6 = 171{,}6e^{10k}$$

$$e^{10k} = \frac{29{,}6}{171{,}6}$$

$$10k = \ln(0{,}172494)$$

$$10k = -1{,}757391$$

$$k = \frac{-1{,}757391}{10}$$

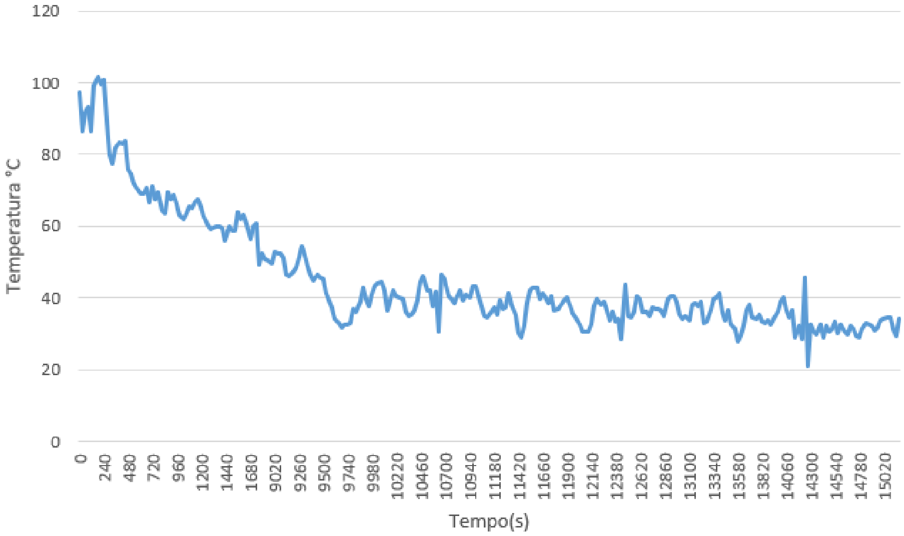
$$k = -0{,}1757391$$

Logo, substituindo vamos ter que a equação característica para o aquecimento do bolo em qualquer tempo é dada pela função:

$$T = 38{,}4 + 171{,}6e^{-0{,}1757391t}$$

A figura 5 mostra o gráfico do resfriamento do bolo até a estabilização em temperatura ambiente.

Figura 5: Gráfico do resfriamento do bolo.



Fonte: dados da pesquisa (2019)

Ao analisar o gráfico é possível observar o bolo ao ser resfriado tende a ficar estabilizado em temperatura ambiente. Logo foi criado o seguinte problema para o resfriamento do bolo: O bolo foi retirado do forno aquecido a 210°C e foi colocado num ambiente a 25°C, 10 minutos depois ele estava com aproximadamente 70° C, vamos determinar a equação que dá a temperatura do bolo em um tempo qualquer.

A lei do resfriamento de Newton nos dá a seguinte equação:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

Sabemos que a temperatura ambiente é 25° C então fica:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 25)$$

Como essa equação é uma diferencial do tipo separável vamos separar as variáveis e integrar ambos os membros:

$$\int \frac{dT}{T - 25} = \int kdt$$

Resolvendo fica:

$$\ln|T - 25°| = kt + c$$

$$T - 25 = e^{kt+c}$$

$$T - 25 = e^{kt}e^{c}$$

Como e^c é uma constante chamaremos de C, logo fica:

$$T = 25 + Ce^{kt}$$

Resolvendo o Problema de valor inicial (PVI) para o tempo inicial igual a 0 (minutos) e a temperatura inicial igual a 210°C (graus Célsius), vem: $T(0) = 210°C$ logo, fica:

$$210 = 25 + Ce^{k.0}$$

$$C = 185$$

Substituindo na equação vem:

$$T = 25 + 185e^{kt}$$

Aplicando novamente o PVI para $T(10) = 70°C$, obteremos o valor da constante de proporcionalidade k.

Substituindo temos:

$$70 = 25 + 185e^{k.10}$$

$$45 = 185e^{10k}$$

$$e^{10k} = \frac{45}{185}$$

$$10k = \ln(0{,}2432)$$

$$10k = -1{,}4136$$

$$k = \frac{-1{,}4136}{10}$$

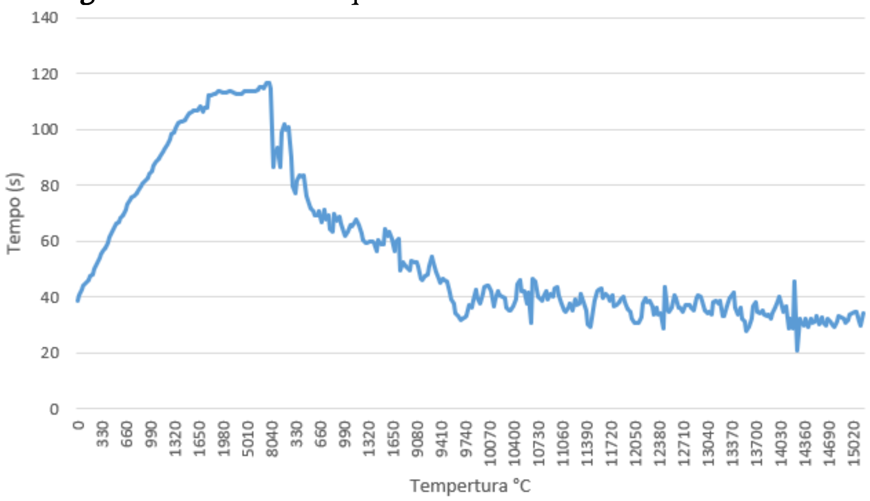
$$k = -0{,}14136$$

Substituindo vamos ter que a equação característica para o resfriamento do bolo em qualquer tempo é:

$$T = 25 + 185e^{-0,14136t}$$

Também foi possível unir o gráfico do aquecimento e do resfriamento do bolo para analisar o fenômeno de uma maneira mais ampla, o mesmo é apresentado na figura 6.

Figura 6: Gráfico do aquecimento e resfriamento do bolo



Fonte: dados da pesquisa (2019)

Ao comparar o aquecimento e o resfriamento, vemos que o tempo para que o bolo resfrie e fique na temperatura ambiente é bem maior pois durante o aquecimento do bolo há uma fonte de calor constante liberada pelo forno. Também é possível observar que o gráfico do resfriamento ocorre maior variação na temperatura, isso acontece devido a variação na temperatura ambiente e a variação da temperatura interna do forno que difere da temperatura de trabalho selecionada que foi 210°C.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através desse trabalho é possível entender alguns conceitos termodinâmicos e relacionar com equações diferenciais, o que mostra que para a comprovação das leis teoria da física é necessário utilizar a matemática como ferramenta de auxílio para estruturar o pensamento físico.

AGRADECIMENTOS

Ao IFPI

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Richard C. DiPrima; tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio. 10ª ed. Rio Janeiro: LTC, 2015.

DIACU, FLORIN. **Introdução a equações diferenciais: teoria e aplicações.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC,2014.

HEWIIT,PAUL G. **Física conceitual.**11 ed. Porto Alegre : Bookman,2011.

SILVA, JAIR. Sobre o problema da variação de temperatura de um corpo. **Conection online da UNIVAG**, Cuiabá, n°5,2010.

PIETROCOLA. A matemática como estruturante do pensamento físico, Florianópolis – SC **Cad. Cat. Ens. Fís.**, v.19, n.1: p.89-109, ago. 2002.

POINCARÉ, Henri. **A ciência e a hipótese**. Brasília: Editora da UnB, 1988.

SIMÕES, C. A. E. **Equações diferenciais na física**. 2014.175 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de licenciatura em matemática, Universidade Federal de Évora, Espirito Santo, 2014.

SOUSA, Luiz Fernando**.** Um experimento sobre dilatação térmica e a lei do resfriamento. 2007. 25f., **Monografia** (Licenciatura em física) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

THOMAS, Lucas Rangel. O uso de equações diferenciais na modelagem de um sistema natural e outros sistemas. 2013. 33f., il **Monografia** (Licenciatura em Ciências Naturais) – Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**, volume 1. tradução Antonio Zumpano, revisão técnica: Antônio Pertence Jr. São Paulo: Pearson Makron /books, 2001.