

TÉCNICAS DE EQUIVALÊNCIA PARA A RESOLUÇÃO DE LIMITES DE FUNÇÕES

EQUIVALENCE TECHNIQUES FOR SOLVING FUNCTION LIMITS

TÉCNICAS DE EQUIVALENCIA PARA LA RESOLUCIÓN DE LÍMITES DE FUNCIONES

Boaventura Beleza dos Santos Nolasco¹

Aginaldo Tobias Bongo²

Inácio Miguel Gabriel³

RESUMO: No contexto do processo docente, é frequente o confronto com novas situações de ensino, principalmente aquelas que se prendem com os procedimentos metodológicos de tratamento de determinados conteúdos. Não se trata de um método de ensino propriamente dito, mas de uma técnica de resolução de uma determinada operação em limites, uma vez que as demais técnicas, fora do recurso às equivalências, são tidas como difíceis e bastante maçadoras para os estudantes a quem se destina o tratamento de limites em Análise Matemática. Identificou-se, no seio dos estudantes, a existência de dificuldades na resolução de limites com viabilidade e, para tal, propuseram-se técnicas de equivalência para a resolução de limites, desde funções algébricas racionais e irracionais até funções transcendentais. Já existem equivalências descritas em diferentes referências bibliográficas e, também, Bongo (2024) abordou a produção de equivalências sobre funções transcendentais. Contudo, as técnicas propostas nesta abordagem versam sobre: a) o tratamento de equivalências aplicadas a funções racionais e irracionais; b) o tratamento de equivalências aplicadas a funções transcendentais; c) a ampliação do escopo elementar do tratamento de equivalências conforme consta em diferentes referências bibliográficas; d) a abordagem da equivalência no âmbito da sua generalidade. A diferença entre esta abordagem e as demais que já trataram do assunto consiste no facto de o trabalho manifestar um campo de tratamento elementar e generalizado das equivalências e potenciar o estudante, ou outro interveniente do processo docente-educativo, a desenvolver um espírito criador na produção de novas equivalências que se conformem com a operação apresentada.

1

Palavras-chave: Limites. Técnicas de equivalência.

ABSTRACT: In the context of the teaching process, it is frequent to encounter new instructional situations, particularly those related to methodological procedures for addressing specific content. This is not a teaching method per se, but rather a technique for solving a specific operation involving limits, since other techniques, apart from the use of equivalences, are regarded as difficult and often quite laborious for students to whom the study of limits in Mathematical Analysis is addressed. Difficulties in solving limits effectively were identified among students and, for this reason, equivalence techniques were proposed for the resolution of limits, ranging from rational and irrational algebraic functions to transcendental functions. Equivalences have already been described in different bibliographic references, and Bongo (2024) also addressed the production of equivalences for transcendental functions. However, the techniques proposed in this approach focus on: (a) the treatment of equivalences applied to rational and irrational functions; (b) the treatment of equivalences applied to transcendental functions; (c) the expansion of the elementary scope of equivalence treatment as presented in different bibliographic references; and (d) the approach to equivalence within the scope of its generality. The difference between this approach and others that have addressed the subject lies in the fact that the present work establishes an elementary and generalized framework for the treatment of equivalences and encourages students, or

¹ Professor Doutor, Instituto Superior de Ciências de Educação da Huíla (ISCED) – Angola.

² Professor, Magistério Secundário – Ministério de Educação de Angola.

³ Professor, Instituto Politécnico da Huíla (IPH) – Universidade Mandume Ya Ndemufayo (UMN) – Angola.

other participants in the teaching-learning process, to develop a creative spirit in the production of new equivalences consistent with the operation under consideration.

Keywords: Limits. Equivalence techniques.

RESUMEN: En el contexto del proceso docente, es frecuente el enfrentamiento con nuevas situaciones de enseñanza, especialmente aquellas relacionadas con los procedimientos metodológicos para el tratamiento de determinados contenidos. No se trata de un método de enseñanza propiamente dicho, sino de una técnica para resolver una determinada operación en límites, dado que las demás técnicas, fuera del recurso a las equivalencias, son consideradas difíciles y, en muchos casos, bastante laboriosas para los estudiantes a quienes se destina el estudio de límites en Análisis Matemático. Se identificaron, en el seno de los estudiantes, dificultades en la resolución eficaz de límites y, para ello, se propusieron técnicas de equivalencia aplicables a la resolución de límites, desde funciones algebraicas racionales e irracionales hasta funciones trascendentes. Ya existen equivalencias descritas en diferentes referencias bibliográficas y Bongo (2024) también abordó la producción de equivalencias sobre funciones trascendentes. No obstante, las técnicas propuestas en este enfoque versan sobre: (a) el tratamiento de equivalencias aplicadas a funciones racionales e irracionales; (b) el tratamiento de equivalencias aplicadas a funciones trascendentes; (c) la ampliación del alcance elemental del tratamiento de equivalencias conforme consta en diferentes referencias bibliográficas; y (d) el abordaje de la equivalencia en el ámbito de su generalidad. La diferencia entre este enfoque y otros que ya han tratado el tema consiste en que el presente trabajo manifiesta un campo de tratamiento elemental y generalizado de las equivalencias y potencia al estudiante, u otro participante del proceso docente-educativo, a desarrollar un espíritu creativo en la producción de nuevas equivalencias acordes con la operación presentada.

Palabras clave: Límites. Técnicas de equivalencia.

1 – Introdução

2

Várias vezes o docente é confrontado com situações novas de ensino, principalmente com aquelas que se prendem com os procedimentos metodológicos de tratamento de algum conteúdo. Não se trata de um método de ensino afim, mas de uma técnica de resolver uma determinada operação em limites, já que as demais, fora das equivalências, são tidas de difíceis e bastante fastidiosas, para os estudantes, a quem se destina o tratamento dos limites em Análise Matemática.

Quando se aborda um método de ensino, normalmente o método é seguido de seus respectivos procedimentos. Daí que, em Matemática, o método mais usual é o da elaboração conjunta provida de procedimentos como a conversação socrática e heurística, na construção do raciocínio que se pretende inculcar no aluno. Este quadro diferencia-se da técnica de ensino, que é uma das modalidades de tratar um determinado conteúdo ou de resolver uma determinada operação.

Assim, o problema identificado é: a dificuldade dos estudantes em resolver a operação de limites pelas vias usuais.

Este problema revela que o estudante, conhecendo os métodos usuais, sem que seja pela regra de L'Hospital, dificilmente encontra resultados, ao tentar resolver as operações, perde alguns dados no meio da operação, por achar que o método utilizado é extensivo e cansativo. Neste sentido colocam-se as seguintes questões:

1. Existe alguma forma de aligeirar a operação de limites?
2. Se existe, tal forma é abordada no mesmo tema?
3. Estarão os estudantes em altura para assimilar a nova forma de abordar os limites?
4. A nova modalidade, de resolver os limites, faz recurso a priori ou a posteriori ao tema?

Estas questões indagaram, sobremaneira, a motivação do artigo, no sentido de que as conjeturadas respostas venham dar corpo à solução do problema identificado. Daí, o artigo subordina-se ao seguinte objetivo:

Garantir técnicas de equivalências para resolução de limites à diferentes funções.

As questões colocadas acima, contribuem para o objetivo visto que, uma das formas de abrandar a resolução de limites é recorrer ao uso de técnicas de equivalências. A equivalência, como tal faz referência a pressupostos abordados antes do tratamento de limites, conformando-se com uma boa base de asseguramento do nível de partida, isto é, faz recurso a: grandezas aproximadas e a grandezas acentuadamente aproximadas. A tendência da variável independente à um número vai garantir a aproximação de duas grandezas, quanto mais a variável tender a um determinado número, mais as grandezas se aproximam uma da outra. Indo para um quadro formal, as grandezas que se apresentam como:

$f(x) \wedge g(x)$; quando $x \rightarrow x_0$ expressam a equivalência:

$f(x) \sim g(x)$: que se lê: $f(x)$ equivale a $g(x)$ quando $x \rightarrow x_0$.

A situação ora referenciada, rebate a questão de que a nova modalidade de resolver os limites faz recurso a priori e não a posteriori, pelo fato de garantir o tratamento aproximado de grandezas e manifestar a sua formalização, assuntos estes tratados antes e dentro da abordagem de limites. Diz-se antes, porque a questão de aproximação de números, trata-se em classes muito anteriores do nível acadêmico atual dos estudantes, quando na devida altura estudaram a matéria sobre arredondamentos de números quer seja por defeito, quer seja por excesso. O tratamento a posteriori, não é aconselhável de imediato, pois que não se pode fazer recurso a um pressuposto que se aborda depois dos limites. Por exemplo, a regra de L'Hospital é contraproducente a sua aplicação, visto que os estudantes ainda não conhecem a Teoria das Derivadas. Esta regra só resulta depois do tratamento das derivadas. Como consequência, acauteladas as situações,

asseguradas as condições prévias de aproximações entre variáveis e números e entre grandezas formais $[f(x)$ e $g(x)]$; os estudantes estão em plenas condições de assimilarem as técnicas de equivalências para resolver limites.

Desta feita, apresentar-se-ão os pressupostos que asseguram o tratamento de equivalências em matéria de definições, teoremas e corolários, de formas que se tenha uma visão geral do corpo teórico do tema.

2 - PRESSUPOSTOS TEÓRICOS EM TORNO DAS EQUIVALÊNCIAS NA RESOLUÇÃO DE LIMITES

Definição: Equivalência de funções

A função $y = f(x)$ é equivalente a função $y = \varphi(x)$ quando $x \rightarrow x_0$ se:

$$f(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1 \text{ (KUDRIÁVTSEV, 1983).}$$

Definição: Equivalência da função $y = f(x)$

Seja $f(x)$ uma função equivalente a função $\varphi(x)$ quando $x \rightarrow x_0$, se $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$; $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon \rightarrow 0$. Denota-se por:

$$f(x) \sim \varphi(x)$$

Em consequência:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$$

A abordagem da equivalência consiste na busca de um infinitésimo comum aos dois termos da fração de formas que sejam imediatamente simplificados entre si, no levantamento da indeterminação.

Definição própria:

Dado o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) \sim \varphi(x)$, se $\varphi(x)$ em produto admite um termo em $(x - x_0)$ como infinitésimo, comum a função $y = g(x)$ de formas que seja simplificável aos dois termos da fração. Denota-se por: $\varphi(x) = (x - x_0)q_1(x) \wedge g(x) = (x - x_0)q_2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)q_1(x)}{(x - x_0)q_2(x)}$$

$$g(x) = (x - x_0)q_2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)q_1(x)}{(x - x_0)q_2(x)} = \frac{q_1(x_0)}{q_2(x_0)}$$

Teorema Próprio: se $f(x)$ é equivalente a $\varphi(x)$ ($f(x) \sim \varphi(x)$) então:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$$

Demonstração:

Sendo $f(x)$ e $\varphi(x)$ funções contínuas nos intervalos $(x, x_0) \vee (x_0, x)$, sendo x_0 o centro da vizinhança, uma vez que $f(x) \sim \varphi(x)$

$$f(x) \sim \varphi(x) \quad (I)$$

Dividindo a relação (I) por $\varphi(x)$ vem:

$$f(x) \sim \varphi(x) \quad /: \varphi(x)$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \sim \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \sim 1$$

Aplicando o limite aos dois membros, uma vez que a razão equivale a 1, tem-se:

5

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} (1)$$

Sendo que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$$

A situação é reversível, admitindo que seja desta forma:

$$f(x) \sim \varphi(x) \quad (I)$$

Dividindo a relação (I) por $f(x)$ vem:

$$f(x) \sim \varphi(x) \quad /: f(x)$$

$$\frac{f(x)}{f(x)} \sim \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \sim 1$$

Por analogia, garanta-se o mesmo tratamento que na vertente anterior, obtendo o mesmo resultado do limite que se consubstancia por:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$$

Desta forma,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$$

Como queríamos demonstrar (c.q.d.)

Estas demonstrações conformam o âmbito formal, requerendo que os estudantes tenham já domínio das noções rudimentares, das propriedades algébricas e operatórias dos limites, para fazer face ao acervo teórico demonstrado.

Por exemplo: verifique se as funções $\varphi(x) = x^2$ e $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ são equivalentes quando $x \rightarrow 0$.

Recorrendo à primeira definição, tem-se:

$$f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{x^2}{1+x^4} = x^2 \cdot \frac{1}{1+x^4} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

6

Como: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^4} = 1$ logo;

$$f(x) \sim \varphi(x)$$

2.1 – Apresentação Informal de Equivalências de Funções

Apresentou-se o aspeto formal de equivalências de funções em primeira instância, pelo fato de que se deram prioridade às definições e teoremas que conformam o corpo teórico das referidas equivalências de funções, para imediatamente justificar o que normalmente se encontra em diferentes literaturas matemáticas.

A abordagem informal é, em geral, pouco referenciada, possivelmente em virtude da percepção de que esse pressuposto já terá sido desenvolvido em níveis académicos anteriores dos estudantes. Contudo, ao adotar tal entendimento, incorre-se em duas fragilidades:

- 1- Não se tem a certeza de que os estudantes terão abordado suficientemente o aspeto informal a fim;
- 2- Não se garantiu o devido asseguramento do nível de partida para o tratamento da equivalência de funções no aspeto formal;

- 3- Garante-se a assimilação forçada aos estudantes de regras, princípios e propriedades operatórias dos limites envolvendo equivalências de funções.

O processo docente-educativo assenta, inicialmente, em pressupostos informais, a partir dos quais, à medida que os estudantes evidenciam evolução cognitiva, se dá a transição para a abordagem formal, entendida como um nível mais avançado de abstração.

Em muitos manuais de Análise Matemática ou de Cálculo – como é designado em outros países – é comum encontrar as seguintes equivalências para $x \rightarrow 0$:

$$1) \operatorname{sen} x \sim x$$

$$2) \operatorname{tg} x \sim x$$

$$3) \ln(1 + x) \sim x$$

$$4) 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$5) \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

Assim, as questões que se colocam são:

1 – Por que é que se pensou e se implementou que: $\operatorname{sen} x \sim x$, quando $x \rightarrow 0$?

2 – Qual foi a base do raciocínio nesta construção?

Se a abordagem estivesse na vertente formal, dir-se-ia que

$$\operatorname{sen} x = x \cdot g(x) \quad \forall x = \operatorname{sen} x \cdot g(x) \quad \text{para se deduzir que: } g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \forall g(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$$

O tratamento, por ora, é informal; deve-se avaliar a tendência de x , atribuindo valores a x que tendam a zero. Chama-se atenção de que os valores a atribuir a x devem ser dados em π para facilitar as conversões de um número $\pi = 3,14 \dots$ para um número π radianos, como ângulo ($\pi = 180^\circ$).

Seja dada a equivalência $\operatorname{sen} x \sim x$, quando $x \rightarrow 0$.

Tenciona-se apresentar por tabelas, de formas que haja uma tendência de valores à esquerda de zero e outra à direita de zero. Pelos conhecimentos de limites que os estudantes já possuem, as tendências laterais de zero ($x \rightarrow 0 - \varepsilon, x \rightarrow 0 + \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0$), devem culminar no mesmo resultado do limite.

Tabela 1: Tendência à esquerda de zero

$x(x \rightarrow 0)$	$\text{sen}x$	x	$\frac{\text{sen}x}{x}$	$\frac{x}{\text{sen}x}$	Tendência de $\frac{\text{sen}x}{x}$
$-\frac{\pi}{11}$	-0,3090	-0,3142	0,98345	1,0168	I
$-\frac{\pi}{12}$	-0,2817	-0,2856	0,9863	1,0138	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$-\frac{\pi}{20}$	-0,2588	-0,2618	0,9885	1,0116	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$-\frac{\pi}{30}$	-0,1045	-0,1047	0,9955	1,0019	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$-\frac{\pi}{180}$	-0,0174	-0,01743	0,9983	1,0017	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$-\frac{\pi}{360}$	-0,0087265	-0,0087266	0,99999885	1,000011	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Discussão da tendência da variável independente (x) e das razões ($\frac{\text{sen}x}{x}$ e $\frac{x}{\text{sen}x}$) Verifique-se que, todos os valores de x tendem a zero:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\pi}{11} &= -\frac{3,1415}{11} = -0,2856 \\
 -\frac{\pi}{12} &= -\frac{3,1415}{12} = -0,2618 \\
 &\vdots \\
 -\frac{\pi}{20} &= -\frac{3,1415}{20} = -0,1571 \\
 &\vdots \\
 -\frac{\pi}{30} &= -\frac{3,1415}{30} = -0,2856 \\
 &\vdots \\
 -\frac{\pi}{180} &= -\frac{3,1415}{180} = -0,017457 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{360} = -\frac{3,1415}{360} = -0,0087$$

⋮

Assim, à medida que se vão atribuindo valores a x , as razões tendem a zero.

As razões de $\frac{\text{sen}x}{x}$ tendem à esquerda de 1 e as razões de $\frac{x}{\text{sen}x}$ tendem à direita de 1. Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen}x} = 1$$

Agora vai-se aceder à tendência à direita da variável independente

Tabela 2: Tendência à direita de zero

$x(x \rightarrow 0)$	$\text{sen}x$	x	$\frac{\text{sen}x}{x}$	$\frac{x}{\text{sen}x}$	Tendência de $\frac{\text{sen}x}{x}$
$\frac{\pi}{11}$	0,3090	0,3142	0,98345	1,016828	1
$\frac{\pi}{12}$	0,2817	0,2856	0,9863	1,013844	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$\frac{\pi}{20}$	0,2588	0,2618	0,9885	1,011592	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$\frac{\pi}{30}$	0,1045	0,1047	0,9955	1,001913	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$\frac{\pi}{180}$	0,0174	0,01743	0,9983	1,001724	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$\frac{\pi}{360}$	0,00872653	0,00872664	0,999987	1,000013	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

De igual forma, para x que tende a zero à sua direita, as razões quer sejam à esquerda quer sejam à direita, todas tendem a 1. Isto prova que o limite nas duas vertentes de tendência da variável independente garante o mesmo resultado. Este é um processo de testagem das equivalências no aspeto informal.

Assim, as duas questões foram respondidas pelo facto de que: por um lado o estabelecimento de equivalências entre duas expressões ($\text{sen}x \sim x$, com $x \rightarrow 0$) garantiu valores aproximados, principalmente quando x tendesse acentuadamente a zero e por outro, a base do

raciocínio deveu-se à análise de resultados das duas grandezas, apoiando-se na teoria de arredondamento de números aproximados por defeito ou por excesso.

Desta feita pode-se aceder às outras tabelas, manifestando o mesmo comportamento em termos de tendências.

Para $\ln(1+x) \sim x$ vem:

Saiba-se que a atribuição de valores a x obedece à condição de existência do logaritmo ($x > -1$).

Tabela 3: Tendência à esquerda de zero, para $x \rightarrow 0$

x	$\ln(1+x)$	$\frac{\ln(1+x)}{x}$	$\frac{x}{\ln(1+x)}$	Tendência de $\frac{\ln(1+x)}{x}$
-0,1	-0,1054	1,054	0,948767	I
-0,01	-0,01005	1,005	0,995025	
-0,001	-0,0010005	1,0005	0,9995	
-0,0001	0,000100005	1,00005	0,99995	
⋮	⋮	⋮	⋮	

Tabela 4: Tendência à direita de zero se $x \rightarrow 0$

x	$\ln(1+x)$	$\frac{\ln(1+x)}{x}$	$\frac{x}{\ln(1+x)}$	Tendência de $\frac{\ln(1+x)}{x}$
0,1	0,0953	1,04932	0,952998	I
0,01	0,00995	1,005025	0,995	
0,001	0,0009995	1,0005	0,9995	
0,0001	0,0000099995	1,00005	0,999995	
⋮	⋮	⋮	⋮	

Neste sentido, acabou-se por testar algumas equivalências usuais, aquelas que normalmente se encontram em manuais.

O objetivo consiste em obter equivalências não usuais, produzir novas equivalências a partir das usuais. Este interesse assegura-se pelo fato de se encontrar alguma viabilidade na solução

de operações de limites, que se consideram difíceis na ótica dos estudantes, pelas conversas informais quer seja em sala de aula ou fora delas.

A produção do trabalho resulta da necessidade que os estudantes sentem, ao almejarem outras alternativas para a solução de suas preocupações. Lembra-se de que a regra de L'Hospital, seja apenas utilizada para a confirmação de resultados. Considere-se também as seguintes razões de sua não aplicabilidade direta na resolução:

- a) A resolução de limites afins tem regras e seus próprios procedimentos dentro do seu tema;
- b) A regra de L'Hospital, resulta inaplicável quando não se tem o domínio da teoria das derivadas;
- c) A regra de L'Hospital aplica-se a casos especiais justificáveis.

2.2 – Apresentação de Operações de Limites por Equivalências

Esta seção aborda limites cuja resolução por equivalências não se configura habitual, mas se considera que, uma vez dominada, facilita a resolução de limites pelas seguintes vantagens:

- a) Resolve os limites em pouco tempo;
- b) Resolve os limites com menos gasto de material;
- c) Resolve os limites com menos dispêndio de energias;
- d) Resolve os limites, admitindo a possibilidade de testagem pela via informal, tal como procedido nas tabelas.

O estudo do cálculo de limites apresenta diferentes níveis de complexidade. Entre os principais desafios associados à sua resolução destacam-se:

- a) Dominar a homogeneização de termos a incluir na operação de limites (NOLASCO; GABRIEL, 2025);
- b) Dominar a transformação da soma em produto na operação de limites;
- c) Dominar as equivalências habituais, já estudadas e testadas em tabelas;
- d) Dominar as fórmulas fundamentais algébricas e trigonométricas, bem como as suas generalizações;
- e) Dominar as regras e propriedades operatórias dos limites.

As dificuldades associadas à resolução de limites exigem do estudante o desenvolvimento de competências específicas, nomeadamente persistência cognitiva, domínio técnico e rigor na aplicação de equivalências fundamentais. O domínio desses elementos favorece uma abordagem

mais eficiente e estruturada na resolução de limites, particularmente quando se recorre ao método das equivalências.

2.2.1 – Produção de técnicas de equivalências na resolução de limites.

Esta subsecção vai gerar equivalências e resolver cada operação apresentada.

I. Resolva os seguintes limites por equivalência (DEMIDOVITCH, 1993):

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$; b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$; c) $\lim_{b \rightarrow a} \frac{a^n - b^n}{b - a}$; d) $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a}}{x + a}$ (n é ímpar)

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - \log_{16}(7x-12)}{x^3 - 64}$

II. Resolução

Para: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$

Tem-se:

O termo do numerador já está homogeneizado e o infinitésimo é: $x - a$, quando $x \rightarrow a$. Neste sentido, transforma-se a soma em produto

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

Para $x = a$; $x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1} = a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1}$

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1} = na^{n-1}$$

Pode-se comprovar o resultado do segundo fator pela via indutiva fazendo: $n = 2, 3, 4, \dots$,
 $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

Para: $x = a$; $x + a = a + a = 2 \cdot a^1$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

Para: $x = a$; $x^2 + ax + a^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$$

Para: $x = a$; $x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 = a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = 4a^3$

...

Nestas induções, nota-se que, para cada segundo fator tem-se:

Quando se trata da diferença de quadrados, o segundo fator do produto é $2 \cdot a^1$;

Quando se trata da diferença de cubos, o segundo fator do produto é $3a^2$;

Quando se trata da diferença de termos de expoente 4, o segundo fator do produto é $4a^3$ e assim sucessivamente até atingir;

A diferença de termos de expoente n , natural, onde o segundo fator é: na^{n-1} .

Desta forma prova-se a legitimidade de que, quando $x \rightarrow a$ por equivalência vem:

$$x^n - a^n \sim (x - a)na^{n-1}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)na^{n-1}}{x - a} = na^{n-1}$$

Para: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$

Procede-se à racionalização do numerador

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} &= \frac{(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a})}{1} \cdot \frac{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{ax^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{xa^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{ax^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{xa^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}} \\ \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} &= \frac{x - a}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{ax^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{xa^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}} \end{aligned}$$

Ao se substituir no fator racionalizante, x por a ($x = a$) vem:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{ax^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{xa^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}} &= \sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-1}} + \dots + \sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-1}} \\ \sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{ax^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{xa^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}} &= n \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}} \end{aligned}$$

Por analogia, procede-se da mesma forma que da diferença de potências

Assim, quando $x \rightarrow a$, por equivalência vem:

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \sim \frac{(x - a)}{n \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)n \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}} = n \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}$$

Para: $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a}}{x + a}$ (n ímpar)

Racionalizando o numerador vem:

Para este caso, no fator racionalizante os sinais alternam-se, positivo e negativo, assim sucessivamente. Adianta-se que as parcelas na posição ímpar assumem sinais positivos e as na posição par assumem sinais negativos.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a} &= \frac{(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a})}{1} \cdot \frac{\sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{ax^{n-2}} + \dots - \sqrt[n]{xa^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{ax^{n-2}} + \dots - \sqrt[n]{xa^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}} \\ \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a} &= \frac{x + a}{\sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{ax^{n-2}} + \dots - \sqrt[n]{xa^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}} \end{aligned}$$

Ao se substituir no fator racionalizante x por $(-a)$, isto é, ($x = -a$) vem:

$$\sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{ax^{n-2}} + \dots - \sqrt[n]{xa^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}} = \sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-1}} + \dots - \sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-1}}$$

$$\sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{ax^{n-2}} + \dots - \sqrt[n]{xa^{n-2}} + \sqrt[n]{a^{n-1}} = n \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}$$

Assim, quando $x \rightarrow -a$, por equivalência vem:

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a} \sim \frac{(x+a)}{n \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -a} \frac{\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a}}{x+a} = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{(x+a)}{(x+a)n \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}} = n \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}$$

Para: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

Deve-se homogeneizar os termos

Para $x = 0$ vem:

$$a^x = a^0 = 1$$

Introduz-se na soma do numerador os termos compensadores

$$a^x - b^x = a^x - 1 + 1 - b^x$$

$$a^x - b^x = (a^x - 1) + (1 - b^x)$$

$$a^x - b^x = (a^x - 1) - (b^x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - 1) - (b^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x}$$

Existem duas formas de estabelecer a equivalência, a primeira é:

Como $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$a^x - 1 = t$$

$$a^x = 1 + t$$

Aplicando o logaritmo natural vem:

$$\ln(a^x) = \ln(1+t)$$

$$x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}$$

De igual modo para $b^x - 1$ vem;

Como $x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$

$$b^x - 1 = u$$

$$x = \frac{\ln(1+u)}{\ln b}$$

Já se averiguou pela equivalência usual que:

$$\text{Para } t \rightarrow 0, \quad \ln(1+t) \sim t$$

$$\text{Para } u \rightarrow 0, \quad \ln(1+u) \sim u$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}} - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\frac{\ln(1+u)}{\ln b}} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}} - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\frac{\ln(1+u)}{\ln b}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{\ln(1+t)}{t}} - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln b}{\frac{\ln(1+u)}{u}} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{\ln(1+t)}{t}} - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln b}{\frac{\ln(1+u)}{u}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{t}{t}} - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln b}{\frac{u}{u}} = \ln a - \ln b \end{aligned}$$

A outra forma mais imediata é:

$$\text{Fazendo: } a^x - 1 \sim x \ln a$$

$$b^x - 1 \sim x \ln b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - 1) - (b^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln a}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln b}{x} = \ln a - \ln b$$

$$\text{Para: } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - \log_{16}(7x-12)}{x^3-64}$$

Deve-se homogeneizar os termos, para $x = 4$ vem:

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot 4\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Desta feita tem-se:

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - \log_{16}(7x-12) = \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - 1 + 1 - \log_{16}(7x-12)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - 1 + 1 - \log_{16}(7x-12) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - 1\right] + [1 - \log_{16}(7x-12)]$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - 1 = \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{2}}{2} \cos\frac{\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - 1 = \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\frac{\pi}{8}(x-4)}{2} \cos\frac{\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \sim \frac{x-4}{8} \cdot 0$$

$$1 - \log_{16}(7x - 12) = \log_{16} 16 - \log_{16}(7x - 12)$$

$$1 - \log_{16}(7x - 12) = \log_{16}\left(\frac{16}{7x - 12}\right)$$

Transformando para base neperiana ou para base do logaritmo natural vem:

$$1 - \log_{16}(7x - 12) = \log_{16}\left(\frac{16}{7x - 12}\right) = \frac{\ln\left(\frac{16}{7x - 12}\right)}{\ln 16}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{16}{7x - 12}\right)}{\ln 16} = \frac{1}{\ln 16} \cdot \ln\left(1 + \frac{16}{7x - 12} - 1\right) = \frac{1}{\ln 16} \cdot \ln\left(1 + \frac{16 - 7x + 12}{7x - 12}\right)$$

$$\frac{1}{\ln 16} \cdot \ln\left(1 + \frac{28 - 7x}{7x - 12}\right)$$

$$\text{Para } x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

Para $x \rightarrow 4$ e recorrendo às equivalências habituais vem:

16

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \sim 2\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{8}(x-4)}{2} \cos\frac{\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \sim 2 \cdot \frac{\pi(x-4)}{2 \cdot 8} \cdot \cos\frac{\frac{\pi}{8} \cdot 4 + \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \sim \frac{\pi(x-4)}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{\ln 16} \cdot \ln\left(1 + \frac{28 - 7x}{7x - 12}\right) \sim \frac{1}{\ln 16} \cdot \left(\frac{28 - 7x}{7x - 12}\right) = \frac{-7(x-4)}{(7x-12)\ln 16}$$

$$x^3 - 64 \sim 3 \cdot 16(x - 4) = 48(x - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}x\right) - \log_{16}(7x - 12)}{x^3 - 64} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}x\right) - 1\right] + [1 - \log_{16}(7x - 12)]}{x^3 - 64}$$

Aplicando as equivalências vem:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - 1 \right] + [1 - \log_{16}(7x - 12)]}{x^3 - 64} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\pi \cdot \left(\frac{x-4}{8}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \frac{(-7)(x-4)}{(7x-12)\ln 16}}{48(x-4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{7(x-4)}{48(x-4)(7x-12)\ln 16} = -\frac{7}{48 \cdot 16 \ln 16} = -\frac{7}{768 \ln 16}$$

Portanto, a obtenção de novas equivalências foi feita pormenorizadamente, para permitir que os estudantes vejam todos os detalhes de construção, mas para resolver algum limite que clame por uma equivalência pode-se pautar imediatamente pela aplicação da equivalência, sem muitos rodeios.

Por exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$$

Saiba-se que o infinitésimo é:

$$\sin \pi x = \sin \pi x - 0 = \sin \pi x - \sin \pi$$

Para: $x \rightarrow \pi$

$$\sin \pi x - \sin \pi \sim -\pi(x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-\pi)(x - 1)}{x - 1} = -\pi$$

3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

- 1- A construção de equivalências para resolver limites depende de cada infinitésimo que se apresente;
- 2- O processo de aceder às novas técnicas de equivalência implica o domínio de transformação da soma em produto;
- 3- O infinitésimo do termo equivalente ao outro divide-se no produto;
- 4- O estudante deve dominar o processo de homogeneização de termos a considerar na operação dos limites, caso os mesmos estejam subentendidos;
- 5- O estudante deve dominar a introdução de termos compensadores afins, na resolução de limites;
- 6- O processo de geração de técnicas de equivalências, pressupõe o domínio de propriedades algébricas e operatórias de limites;
- 7- A produção de novas equivalências implica a preparação dos estudantes, pelas equivalências habituais e cuja consequência é a geração de novas equivalências.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONGO, A. T. Proposta metodológica de produção de equivalências na resolução de limites de funções transcendentais na 11ª classe da Escola do Magistério Secundário. 2024. Dissertação (Mestrado em Ciências, especialidade em Matemática) – Instituto Superior de Ciências da Educação da Huíla, Angola, 2024.

DEMIDOVITCH, B. *Análise matemática: problemas e exercícios*. Moscovo: Editora MIR; Escolar Editora, 1993.

NOLASCO, B.B.S. Racionalização de uma expressão de dois termos $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$, com $n \geq 3$ e sua aplicabilidade em Análise Matemática I. Dissertação (mestrado em Ensino das Ciências) – ISCED-Huíla, Angola, 2009.

Nolasco, B.B.S. Reflexão: O Apropriar-se do Enfoque dos sábios. Uma realidade na Produção de Equivalências no estudo de limites em Matemática. 2023.

NOLASCO, B. B. dos S., & Gabriel, I. M. (2025). HOMOGENEIZAÇÃO DE TERMOS PARA RESOLUÇÃO DE LIMITES. *Revista Ibero-Americana De Humanidades, Ciências E Educação*, 11(9), 3447–3462. <https://doi.org/10.51891/rease.v11i9.21119>