doi.org/10.51891/rease.v11i10.21684

PRINCÍPIOS METODOLÓGICOS PARA A DETERMINAÇÃO DE FUNÇÕES INVERSAS, UMA REALIDADE NO ENSINO SECUNDÁRIO

METHODOLOGICAL PRINCIPLES FOR THE DETERMINATION OF INVERSE FUNCTIONS: A REALITY IN SECONDARY

PRINCIPIOS METODOLÓGICOS PARA LA DETERMINACIÓN DE FUNCIONES INVERSAS: UNA REALIDAD EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Boaventura Beleza dos Santos Nolasco[1]
Inácio Miguel Gabriel[2]

RESUMO: Manifesta-se a intenção de pesquisa para resolver algum problema na gestão do processo de ensino e aprendizagem. Abordou-se o trabalho sob o título: Princípios Metodológicos para a Determinação de Funções Inversas, uma Realidade no Ensino Secundário. A intenção esteve movida pela preocupação de que havia situações incertas de considerar se a função inversa de $y = f(x)$ definida em A sobre B é: $y = f^{-1}(x)$ ou $x = f^{-1}(y)$ ou ainda se é $x = g(y)$, tal como aparece em diferentes livros. Esta situação conforma o problema de investigação que é: a existência de diferentes notações de funções inversas de $y = f(x)$. O objetivo consiste em quebrar os equívocos na determinação de funções inversas de formas que tendo uma função dependente de x, a sua função inversa também depende de x , isto é, se $y = f(x)$ a sua função inversa é $y = f^{-1}(x)$. Sendo $x = f^{-1}(y)$, esta não é a notação de uma função inversa de $y = f(x)$, falta outro procedimento. Partindo da notação geral da função, $y = f(x)$, substitui-se o y por x e o x por y, obtendo, $x = f(y)$, para depois isolar-se y em função de x onde: $y = f^{-1}(x)$. A condição $x = f^{-1}(y)$ como função inversa de $y = f(x)$, conduz erroneamente os resolventes na obtenção da função inversa a partir de $y = f(x)$. Desta forma, se $y = f(x)$ é bijetiva, definida de A sobre B, obtém-se: $y = f^{-1}(x)$ também bijetiva, definida de B sobre A. Também, outros autores consideram que a função inversa de $y = f(x)$ é $x = g(y)$. Tudo isto conduz, o aluno a uma série de dúvidas e equívocos que não o ajudam na determinação adequada de funções inversas. Para tal, impõe-se o dispositivo prático para a resolução deste problema.

Palavras-Chave: Função e Função inversa.

[1]Professor Doutor, Instituto Superior de Ciências de Educação da Huíla (ISCED) – Angola. https://orcid.org/0009-0002-4726-6159.
[2]Professor, Instituto Politécnico da Huíla (IPH) – Universidade Mandume Ya Ndemufayo – Angola. https://orcid.org/0009-0004-4564-0965.

ABSTRACT: The research intention arises from the need to address a problem in the management of the teaching and learning process. The study was developed under the title: *Methodological Principles for the Determination of Inverse Functions: A Reality in Secondary Education.* The motivation stemmed from the concern that there were uncertain situations regarding whether the inverse function of $y = f(x)$, defined from A onto B, should be expressed as $y = f^{-1}(x)$ or $x = f^{-1}(y)$, or even $x = g(y$, as found in various textbooks. This situation defines the research problem, namely: the existence of different notations for the inverse functions of $y = f(x)$. The objective is to clarify the misconceptions in determining inverse functions, showing that, given a function dependent on x, its inverse also depends on x. That is, if $y = f(x)$, its inverse is $y = f^{-1}(x)$. Since $x = f^{-1}(y)$ is not the correct notation for the inverse of $y = f(x)$, another procedure is required. Starting from the general notation of a function $y = f(x)$, one substitutes y with x and x with y, obtaining $x = f(y)$, and then isolates y in terms of x, resulting in $y = f^{-1}(x)$. Considering $x = f^{-1}(y)$ as the inverse of $y = f(x)$ leads to errors in the process of obtaining the inverse function from $y = f(x)$. Thus, if $y = f(x)$ is bijective, defined from A onto B, then $y = f^{-1}(x)$ is also bijective, defined from B onto A. Some authors also consider the inverse of $y = f(x)$ to be $x = g(y)$, which generates a series of doubts and misconceptions among students, hindering their proper understanding of inverse functions. Therefore, a practical approach is required to resolve this problem.

Keywords: Function. Inverse Function.

RESUMEN: La intención de la investigación surge de la necesidad de resolver un problema en la gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje. El trabajo se abordó bajo el título: *Principios Metodológicos para la Determinación de Funciones Inversas: Una Realidad en la Educación Secundaria.* La motivación provino de la preocupación por las situaciones inciertas al considerar si la función inversa de $y = f(x)$, definida de A sobre B, debe expresarse como $y = f^{-1}(x)$, $x = f^{-1}(y)$ o incluso $x = g(y)$, tal como aparece en diferentes libros de texto. Esta situación constituye el problema de investigación: la existencia de diferentes notaciones de funciones inversas de $y = f(x)$. El objetivo consiste en aclarar los equívocos en la determinación de funciones inversas, mostrando que, dada una función dependiente de x, su inversa también depende de x. Es decir, si $y = f(x)$, su función inversa es $y = f^{-1}(x)$. Dado que $x = f^{-1}(y)$ no representa la notación correcta de la función inversa de $y = f(x)$, se requiere otro procedimiento. Partiendo de la notación general de la función $y = f(x)$, se sustituye y por x y x por y, obteniendo $x = f(y)$, para luego aislar y en función de x, donde $y = f^{-1}(x)$. Considerar $x = f^{-1}(y)$ como función inversa de $y = f(x)$ conduce a errores en la obtención de la inversa. De este modo, si $y = f(x)$ es biyectiva, definida de A sobre B, entonces $y = f^{-1}(x)$ también es biyectiva, definida de B sobre A. Asimismo, otros autores consideran que la función inversa de $y = f(x)$ es $x = g(y)$, lo que genera una serie de dudas y equívocos que dificultan al estudiante la determinación adecuada de funciones inversas. Por lo tanto, se impone un dispositivo práctico para la resolución de este problema.

Palabras clave: Función. Función inversa.

1 – INTRODUÇÃO

O processo docente-educativo é um fenómeno social, cuja solução de seus problemas desdobra-se por fases, até a obtenção de resultados desprovidos de equívocos. Pressupõe-se que por fases, o processo vai obedecer a etapas, sem queimar estádios; o lugar não importa tanto se é na escola, no domicílio ou ainda em algum centro de estudos, o que conta é que a tarefa encontra sempre algum espaço para a sua realização.

De facto, o problema prende-se com a ambiguidade e falta de clareza na consideração de $x = f^{-1}(y)$ como função inversa de $y = f(x)$. Outros autores consideram função inversa de $y = f(x)$, a função $x = g(y)$. Neste sentido, os alunos não têm uma forma metodologicamente estável para a determinação de funções inversas e daí é que surgiu a intenção de produzir o trabalho com o título "Princípios Metodológicos para a Determinação de Funções Inversas, no Ensino Secundário"(Nolasco, 2001).

2 – APORTE TEÓRICO

A base que sustenta teoricamente o trabalho foi explorada em Demidovitch et al. (1993), uma das obras mais amplamente consumidas nas lides académicas de nível médio e superior em períodos anteriores, onde se constata uma notação que oferece muitas dúvidas aos alunos, na determinação de funções inversas.

Para Santos (s/d), manifesta-se uma notação obtida de funções inversas da forma $x = f^{-1}(y)$. A referida notação não cumpriu com o primeiro passo e evidenciou o segundo passo de uma forma não clara. Este cenário complica ainda mais o aluno, se o corpo docente não estiver atento, transporta estas formas dúbias e confusas para a sala de aulas, o que ocasiona uma série de problemas. Ainda, se o docente enveredar por outra via de notação; $x = g(y)$, como função inversa de $y = f(x)$ é outro equívoco que leva o aluno a ter sérios problemas, no tratamento e assimilação do conteúdo. Em suma, o processo docente-educativo é muito delicado, não deve contar somente com o material disponibilizado, mas antes contar com:

a) a proficiência do docente no assumir de suas responsabilidades;
b) o espírito crítico do que lê e do que consome em termos de literacia;
c) o zelar pelo que leva para a sala de aulas, para partilhar com os seus alunos.

2.1 – Aspetos preliminares na determinação de funções inversas

Esta subseção manifesta o leque de requisitos para que uma determinada função real de variável real garanta a sua inversa.

Uma dada função $y = f(x)$ definida de A sobre B admite uma função inversa se $y = f(x)$ for bijetiva.

Definição 1: A função $y = f(x)$ definida de A sobre B é bijetiva se for injetiva e sobrejetiva em simultâneo. Assim $y = f(x)$ denota-se por:

$$f: A \to B$$

Definição 2: A função $y = f(x)$ definida de A sobre B é injetiva se de diferentes elementos de $x(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ obtém-se diferentes elementos de $y(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots)$ $y = f(x)$. Denota-se por: $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \cdots \neq x_n \neq \cdots \implies y_1 \neq y_2 \neq y_3 \neq \cdots \neq y_n \neq \cdots$ (Santos, s/d)

Definição 3: A função $y = f(x)$ definida de A sobre B é sobrejetiva se todos elementos de B servem de imagem aos elementos de A, isto é, o contradomínio é igual a imagem de A. Denota-se por: $I_m y = B$.

Definição 4: Composição de funções: sejam as funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ bijetivas, considera-se $f[g(x)]$ como função composta de f que depende de g.

Denota-se por: $f0g = f[g(x)]$

$$f0g \neq g0f$$

A condição $f0g = g0f$ se e só se $f = g^{-1} \vee g = f^{-1}$. Assim, sendo $y = f(x)$ e $y = g(x)$ vem: 4566

$$f0g = g0f = x$$

Definição 5: Função identidade $(I = x)$, é toda a função em cada elemento de x transforma-se em si próprio.

Definição 5: A composição de duas funções inversas entre si, garante a função identidade $(I = x)$.

Se $f0g = g0f = x$ é porque $f = g^{-1} \vee g = f^{-1}$

Exercício: Dadas funções reais com variáveis reais verifique se são bijetivas e manifeste o resultado de suas composições:

a) $f(x) = 3x - 2$; $g(x) = 5x + 1$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

b) fog ; gof

c) Se $h(x) = \frac{x-1}{5}$ $de\ \mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, ache hog. E qual é a consideração de h em relação a g e vice-versa

Resolução:

a) A função $f(x) = 3x - 2$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$,

x	...	-2	-1	0	1	2	...

y	...	-8	-5	-2	1	4	...

De diferentes valores de x, embora tenham sido atribuídos por representatividade, por serem apenas inteiros numa altura em que se trata de uma função real de variável real, obtêm-se diferentes valores em y, logo a função em causa é injetiva. Como todos os valores de y em $\mathbb{R}$, servem de imagem aos valores de x em $\mathbb{R}$, logo a função é sobrejetiva. Portanto, a função em referência é bijetiva.

A função $g(x) = 5x + 1$, de igual modo é bijetiva pelo mesmo tratamento.

b)

$$fog = f[g(x)]$$
$$fog = 3(5x + 1) - 2$$
$$fog = 15x + 1$$
$$\wedge$$
$$gof = g[f(x)]$$
$$gof = 5(3x - 2) + 1$$
$$gof = 15x - 9$$

c) $hog = \frac{5x+1-1}{5} = x$

Neste sentido $h(x)$ é função inversa de $g(x)$, vice-versa. Da mesma forma pode-se escrever: $h(x) = g^{-1}(x) \ \vee g(x) = h^{-1}(x)$

2.1.1 – Contraexemplos de funções injetivas e sobrejetivas

Na vida, existe situações que melhor se entendem partindo de contraexemplos. Neste sentido, manifesta-se um contraexemplo da função injetiva e outro contraexemplo da função bijetiva.

Uma função é não-injetiva se assumir o mesmo valor para y de diferentes valores em x. Por exemplo: $f(x) = x^2 \ de \ \mathbb{R} \ em \ \mathbb{R}$.

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	4	1	0	1	4	...

Nesta tabela de valores, nota-se que: $\ldots, -2 \neq 2, -1 \neq 1$, ..., obtém-se respetivamente:

-1 e 1 valores diferentes de x, obtém-se o mesmo valor de y que é 1;

-2 e 2 valores diferentes de x, obtém-se o mesmo valor de y que é 4 e assim sucessivamente.

Neste sentido a função $f(x) = x^2 \ de \ \mathbb{R} \ em \ \mathbb{R}$, não é injetiva e por consequência também não bijetiva.

A função não é sobrejetiva, quando nem todos os elementos do conjunto de chegada servem de imagem aos elementos do conjunto de partida (domínio).

Por exemplo:

$f(x) = \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}_0^+$ $em\ \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_0^+, conjunto\ de\ números\ reais\ não - negativos$)

x	...	0	1	2	3	4	...
y	...	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	...

Desta tabela, depreende-se que nem todos os números reais servem de imagem aos elementos do domínio dos números reais não-negativos, segundo a definição da função. Assim, a função não é sobrejetiva. Por exemplo, na tabela, não encontramos números negativos de y que possam servir de imagem aos elementos de x.

2.2 – Dispositivo prático para a determinação de funções inversas

Conhecida a função $y = f(x)$ e a sua definição de A sobre B, sendo bijetiva, para se determinar a sua função inversa obedece-se a seguinte regra:

1º. Substituir o x por y e o y por x;
2º. Isolar o y em função do x.

2.2.1 – Verificação de funções inversas entre si

Depois de se ter obtido a função inversa de $y = f(x)$ que se denota por: $y = f^{-1}(x)$, procede-se a composição de funções, cujo resultado é a função identidade I.

$I = x,\ função\ que\ cada\ elemento\ de\ x\ transforma - se\ em\ si\ próprio$).

$$f(x)0f^{-1}(x) = f^{-1}(x)0f(x) = x$$

Exercícios

1 – Determine a função inversa de:

a) $f(x) = 3x - 2$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \ 5x + 1$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

c) $h(x) = \frac{x-1}{5} de\ \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

d) $f(x) = x^3 - 1\ de\ \mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$

e) $g(x) = log(1 - x) \quad de\ \ ]-\infty; 1[\ \ em\ \mathbb{R}$

2 – Faça com que a função $y = x^2 + x + 1$, admita sua função inversa bem como as suas definições.

3 – Determine todas as condições para que a função $g(x) = 2^{x^2+x+1}$, admita a função inversa.

Resolução:

a) Sendo $y = f(x) = 3x - 2$, uma função bijetiva vem:

$$y = 3x - 2$$

1º substituir x por y e y por x vem:

$$x = 3y - 2$$

2º Isolar y em função de x

$$y = \frac{x+2}{3} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

$$f(x)0f^{-1}(x) = 3\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$\vee$$

$$f^{-1}(x)0f(x) = \frac{3x-2+2}{3} = x$$

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$ é função inversa de $f(x) = 3x - 2$

b) $y = g(x) = 5x + 1$. Procedendo da mesma forma vem:

$$y = 5x + 1$$

$$x = 5y + 1$$

$$y = \frac{x-1}{5} \Longrightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-1}{5}$$

Verificação:

$$g^{-1}(x)0g(x) = \frac{5x+1-1}{5} = x$$

c)

$$y = h(x) = \frac{x-1}{5}$$

$$x = \frac{y-1}{5}$$

$$y = 5x + 1 \Longrightarrow h^{-1}(x) = 5x + 1$$

Verificação: $h(x)0h^{-1}(x) = \frac{5x+1-1}{5} = x$

d)

$$y = f(x) = x^3 - 1$$

$$y = x^3 - 1$$

$$x = y^3 - 1$$

$$y = \sqrt[3]{x+1} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

Verificação: $f(x)0f^{-1}(x) = \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - 1 = x$

e)

$$y = g(x) = \log(1-x) \text{ de }]-\infty; 1[\quad e\,m\,\mathbb{R}$$

$$y = \log(1-x)$$

$$x = \log(1-y)$$

$$10^x = 1-y$$

$$y = 1 - 10^x \Longrightarrow g^{-1}(x) = 1 - 10^x \text{ de } \mathbb{R} \text{ em }]-\infty; 1[$$

Verificação: $g(x)0g^{-1}(x) = \log(1 - 1 + 10^x) = x$

Resolvendo a questão 2 vem:

Tratando-se de uma função quadrática deve-se determinar as coordenadas do vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = V(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ dai, sabe-se que a função é não injectiva porque quanto a sua monotonia:

A função decresce de $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ e cresce $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

O domínio da função é $\mathbb{R}$ e a sua imagem é: $I_m = \left\{y \in R: y \geq \frac{3}{4}\right\}$. Isto significa que admite valores iguais para y, aplicando valores diferentes de x. Por conseguinte, não é bijetiva.

Para que seja possível determinar a sua inversa, fragmenta-se o seu domínio em dois intervalos, como é o reflexo da monotonia da mesma função.

Desta situação pode-se ter:

1º) $y = x^2 + x + 1$, definida de $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ em $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

$$\vee$$

2º) $y = x^2 + x + 1$, definida de $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ em $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

4570

Para o 1º caso vem:

$y = x^2 + x + 1$

$x = y^2 + y + 1$

Isolando y em função de x vem:

$y^2 + y + 1 - x = 0, \qquad a = 1, \qquad b = 1 \;\; e \;\; c = 1 - x$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (1-x) = 4x - 3$$

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{4x-3}}{2}$$

$f_1^{-1}(x) = -\frac{1+\sqrt{4x-3}}{2}$ definida de: $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

Para o 2º caso vem:

$y = x^2 + x + 1$

$x = y^2 + y + 1$

Isolando y em função de x vem:

$y^2 + y + 1 - x = 0, a = 1, b = 1\ e\ c = 1 - x$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4.1.(1 - x) = 4x - 3$$

$$y_2 = \frac{-1 + \sqrt{4x - 3}}{2}$$

$f_2^{-1}(x) = -\frac{1 - \sqrt{4x-3}}{2}$ definida de: $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ em $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Assim tem-se duas alternativas, quer dizer a função ficou fragmentada em duas para corresponder a exigência da bijetividade. Neste exercício nota-se a verificação, da troca dos domínios respetivos da função $y = f(x)$ para o contradomínio da $y = f_1^{-1}(x)$ e da $y = f_2^{-1}(x)$, vice-versa.

No entanto, significa dizer que, das duas alternativas, pelo menos uma é função inversa da função inicial ($y = x^2 + x + 1$).

Resolvendo a questão 3 vem:

Para a função $y = g(x) = 2^{x^2+x+1}$, desenvolve-se uma tabela de tripla entrada;

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	…
$x^2 + x + 1$	…	3	1	$\frac{3}{4}$	1	3	7	…
$y = g(x)$	…	8	2	$2^{3/4}$	2	8	128	…

Nota-se que existem diferentes valores de x que garantem os mesmos valores em y, logo a função não é injetiva e por consequência não é bijetiva. Graficamente existe um eixo de simetria que é: $x = -\frac{1}{2}$.

Quanto a sua monotonia:

A função é decrescente de: $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$

A função é crescente de: $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Para se garantir a bijetividade da função, deve-se fragmentar a mesma em dois domínios:

1º caso: $y = g(x) = 2^{x^2+x+1}$, definida de: $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ em $[2^{3/4}; +\infty[$

2º caso: $y = g(x) = 2^{x^2+x+1}$, definida de; $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ em $[2^{3/4}; +\infty[$

Procedendo o cálculo de funções inversas para cada caso vem:

$$y = g(x) = 2^{x^2+x+1}$$

$$y = 2^{x^2+x+1}$$

Trocar o x por y e o y por x vem:

$$x = 2^{y^2+y+1}$$

Isolar y em função de x vem:

Uma das possibilidades consiste em aplicar à igualdade, o logaritmo de base dois

$$\log_2(x) = \log_2\left(2^{y^2+y+1}\right)$$

$$\log_2(x) = (y^2 + y + 1)\log_2(2)\text{; sendo } \log_2(2) = 1\text{, vem:}$$

$$y^2 + y + 1 - log_2(x) = 0$$

Sendo uma equação quadrática em relação a variável y vem:

$$a = 1, \qquad b = 1, \qquad c = 1 - \log_2(x)$$

$$\Delta = 1 - 4(1 - \log_2(x)) = 4\log_2(x) - 3 = \log_2(x)^4 - \log_2(8)$$

$$\Delta = \log_2(x)^4 - \log_2(8) = \log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)$$

$$y_1 = g^{-1}{}_1(x) = \frac{-1 - \sqrt{\log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{\log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)}}{2}$$

$$\vee$$

$$y_2 = g^{-1}{}_2(x) = \frac{-1 + \sqrt{\log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)}}{2} = -\frac{1 - \sqrt{\log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)}}{2}$$

$g^{-1}{}_1(x) = -\frac{1+\sqrt{\log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)}}{2}$, definida de: $\left[2^{3/4};\ +\infty\right[$ em $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right]$

Estes intervalos foram obtidos pela definição da função inversa. Agora procede-se a homologação dos mesmos, pela obtenção do campo de existência da função;

$$g^{-1}{}_1(x) = -\frac{1 + \sqrt{\log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)}}{2}$$

$$\begin{cases} \log_2\left(\frac{x^4}{8}\right) \geq 0 \\ \frac{x^4}{8} > 0 \end{cases}$$

A segunda condição;

$\frac{x^4}{8} > 0,$ é dada pela *pela condição de existência do logaritmo*

$$\begin{cases} \log_2\left(\frac{x^4}{8}\right) \geq 0 \\ \frac{x^4}{8} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2\left(\frac{x^4}{8}\right) \geq log_2(1) \\ x^4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^4}{8} \geq 1 \\ x < 0 \ \vee x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^4-8}{8}\geq 0/.8 \\ x<0 \ \vee x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4-8\geq 0 \\ x<0 \ \vee x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x^2-\sqrt{8})(x^2+\sqrt{8})\geq 0 \\ x<0 \ \vee x>0\end{cases}$$

Resolvendo a inequação $(x^2-\sqrt{8})(x^2+\sqrt{8})\geq 0$ vem:

$$\left(\begin{cases}x^2-\sqrt{8}\leq 0 \\ x^2+\sqrt{8}\leq 0\end{cases} \vee \begin{cases}x^2-\sqrt{8}\geq 0 \\ x^2+\sqrt{8}\geq 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{cases}(x-\sqrt[4]{8})(x+\sqrt[4]{8})\leq 0 \\ \emptyset\end{cases} \vee \begin{cases}(x-\sqrt[4]{8})(x+\sqrt[4]{8})\geq 0 \\ \mathbb{R}\end{cases}\right) \Leftrightarrow \emptyset \ \vee (x-\sqrt[4]{8})(x+\sqrt[4]{8})\geq 0$$

$\Leftrightarrow (x-\sqrt[4]{8})(x+\sqrt[4]{8})\geq 0$. Desta inequação deduz-se que:

$$\begin{cases}x\leq\sqrt[4]{8} \\ x\leq-\sqrt[4]{8}\end{cases} \vee \begin{cases}x\geq\sqrt[4]{8} \\ x\geq-\sqrt[4]{8}\end{cases} \Leftrightarrow x\leq-\sqrt[4]{8} \ \vee x\geq\sqrt[4]{8}$$

Compondo o sistema anterior vem:

$$\begin{cases}x\leq-\sqrt[4]{8} \ \vee x\geq\sqrt[4]{8} \\ x<0 \ \vee x>0\end{cases} \Rightarrow x\leq-\sqrt[4]{8} \ \vee x\geq\sqrt[4]{8}$$

Nesta condição, o domínio de

$$g^{-1}{}_1(x) = -\frac{1+\sqrt{\log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)}}{2}$$

ou é $x\leq-\sqrt[4]{8}$ ou é $x\geq\sqrt[4]{8}$, bastava uma das alternativas.

Por compatibilidade é: $x\geq\sqrt[4]{8}=\left[2^{3/4},+\infty\right[$ o que confirma a definição da função inversa. O contradomínio desta função é dado pela atribuição de valores a x, segundo o intervalo e daí tem-se:

$$-\frac{1}{2},-1,-\frac{1+\sqrt{5}}{2},\dots,-2,\dots$$

Ordenando crescentemente vem:

$$\cdots,-2,\cdots,-\frac{1+\sqrt{5}}{2},-1,-\frac{1}{2}$$

Por representatividade dos números reais e pela intuição matemática que se tem vê-se que a disposição de números satisfaz o intervalo;

$\left[-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ que é o contradomínio da função:

$$g^{-1}{}_1(x) = -\frac{1+\sqrt{\log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)}}{2}$$

Para $g^{-1}{}_2(x) = -\frac{1-\sqrt{\log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)}}{2}$, definida de: $\left[2^{3/4};\ +\infty\right[$ em $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right]$.

Aludindo ao mesmo tratamento quanto à alternativa anterior confirma-se, por analogia, a definição desta função.

Desta feita procede-se a verificação:

$$g_1^{-1}(x)0g(x) = -\frac{1+\sqrt{\log_2\left(\frac{2^{4x^2+4x+4}}{8}\right)}}{2}$$

$$g_1^{-1}(x)0g(x) = -\frac{1+\sqrt{\log_2(\ 2^{4x^2+4x+4-3})}}{2}$$

$$g_1^{-1}(x)0g(x) = -\frac{1+\sqrt{4x^2+4x+1}}{2}$$

$$g_1^{-1}(x)0g(x) = -\frac{1+\sqrt{(2x+1)^2}}{2}$$

$$g_1^{-1}(x)0g(x) = -\frac{1+\ 2x+1}{2} = -(x+1)$$

Neste sentido:

$g^{-1}{}_1(x) = -\frac{1+\sqrt{\log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)}}{2}$ não é função inversa de $y = g(x) = 2^{x^2+x+1}$

Para:

$$g_2^{-1}(x)0g(x) = -\frac{1-\sqrt{\log_2(\ 2^{4x^2+4x+4-3})}}{2}$$

$$g_2^{-1}(x)0g(x) = -\frac{1-\sqrt{4x^2+4x+1}}{2} = -\frac{1-\sqrt{(2x+1)^2}}{2}$$

$$g_2^{-1}(x)0g(x) = -\frac{1-\ 2x-1}{2} = -\frac{(-2x)}{2} = x$$

Portanto, $g^{-1}{}_2(x) = -\frac{1-\sqrt{\log_2\left(\frac{x^4}{8}\right)}}{2}$ é função inversa de $y = g(x) = 2^{x^2+x+1}$ pelo facto de a composição de duas funções garantirem a função identidade (I= x).

3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em fase de monografia, setembro de 2001, um dos autores deste artigo já manifestava um espírito de investigação com vista a dirimir dificuldades no tratamento de funções inversas no Ensino Médio e não só, naquela altura. Tendo em conta a realidade explorada e as dificuldades que ainda hoje persistem em algumas fases da formação matemática, tecem-se as seguintes considerações:

1- Todo o docente ou pesquisador deve estar imbuído de espírito crítico sobre as literacias a que faz recurso, na realização das suas tarefas;

2- Uma função de x, a determinação de sua função inversa demanda igualmente uma função de x;

3- A notação $x = g(y)$ não é apropriada como função inversa de $y = f(x)$;

4- A notação $x = f^{-1}(y)$ não está completa para se determinar a função inversa de $y = f(x)$;

5- A notação da função inversa de $y = f(x)$ é apenas $y = f^{-1}(x)$;

6- A notação $x = f^{-1}(y)$ é apenas uma função escrita na ordem inversa da variável da função $y = f(x)$, sem que isto signifique ser função inversa desta;

7- Algumas obras literárias, manifestam notações dúbias, que conduzem os manuseadores das mesmas a resultados erróneos.

REFERÊNCIAS

DEMIDOVITCH B, et al. Problemas e exercícios de análise matemática. Moscou: Mir; 1993.

NOLASCO BBS. Princípios metodológicos para a determinação de funções inversas, no 1º Ano de Ciências Exatas do PUNIV, do Instituto Médio de Economia do Lubango. Trabalho de Licenciatura – ISCED/Lubango; 2001.

SANTOS FB. Sebenta de Matemáticas Gerais. [s.d.]

ISSN: 2675-3375