Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação — REASE

doi.org/10.51891/rease.v11i9.21119

HOMOGENEIZAÇÃO DE TERMOS PARA RESOLUÇÃO DE LIMITES

HOMOGENIZATION OF TERMS IN LIMIT EVALUATION

HOMOGENEIZACIÓN DE TÉRMINOS PARA LA RESOLUCIÓN DE LÍMITES

Boaventura Beleza dos Santos Nolasco[1]
Inácio Miguel Gabriel[2]

RESUMO: A necessidade de melhorar o processo de ensino e aprendizagem é uma intenção premente, desta feita surge a intenção de produzir o trabalho com o intuito de colmatar as dificuldades que os estudantes têm para resolver alguns limites, alegando complexidade quase desvencilhável. Os estudantes em ambientes de conversas informais e em aulas de Análise Matemática I (Cálculo I para a realidade de outros países), manifestaram falta de domínio na resolução de limites, pelo fato de; não se garantir o tratamento adequado de inserção de termos homogéneos na operação. Esta situação configura o problema de investigação e para desbaratá-lo é necessário produzir um corpo teórico que manifeste uma série de procedimentos, que viabilizem o tratamento das referidas operações em limites em função da forma; $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e também $f(a)$ e $g(a)$ como termos homogéneos das funções anteriores, respetivamente.

Palavras-chave: Limites. Homogeneização de termos. Ensino-aprendizagem.

ABSTRACT: The need to improve the teaching and learning process is a pressing concern. Thus, this study aims to address the difficulties students face when solving certain limits, often perceived as almost insurmountably complex. In informal discussions and in Calculus I classes (Analysis I for the context of other countries), students expressed a lack of mastery in solving limits, mainly due to the inadequate handling of the insertion of homogeneous terms in the operations. This situation defines the research problem, and to address it, it is necessary to develop a theoretical framework that presents a series of procedures enabling the proper handling of these limit operations in terms of $y = f(x)$ e $y = g(x)$, as well as $f(a)$ e $g(a)$ as homogeneous terms of the respective functions.

Keywords: Limits. Homogenization of terms. Teaching-learning process.

RESUMEN: La necesidad de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje es una preocupación apremiante. Por ello, este estudio tiene como objetivo abordar las dificultades que los estudiantes enfrentan al resolver ciertos límites, percibidos a menudo como casi insuperables. En conversaciones informales y en clases de Análisis Matemático I (Cálculo I en el contexto de otros países), los estudiantes manifestaron falta de dominio en la resolución de límites, principalmente debido al manejo inadecuado de la inserción de términos homogéneos en las operaciones. Esta situación configura el problema de investigación y, para abordarlo, es necesario desarrollar un marco teórico que presente una serie de procedimientos que permitan el manejo adecuado de estas operaciones de límites en función de $y = f(x)$ y $y = g(x)$, así como $f(a)$ y $g(a)$ como términos homogéneos de las respectivas funciones.

Palabras clave: Límites. Homogeneización de términos. Proceso de enseñanza-aprendizaje.

[1] Ph.D. em Matemática e Aplicações pela Universidade de Beira Interior (UBI) – Portugal. Professor, Instituto Superior de Ciências de Educação da Huíla (ISCED) – Angola.
[2] Professor, Instituto Politécnico da Huíla - Universidade Mandume Ya Ndemufayo; e pelo Ministério da Educação – Namibe. Licenciado em Ensino de Matemática; Licenciado em Engenharia de Minas; e Mestrando em Educação e Tecnologias Digitais, pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa – Portugal.

1 – INTRODUÇÃO

O processo docente-educativo se afigura complexo pelo facto de lidar, essencialmente por três componentes; o estudante, o professor e a matéria em estudo. A mente humana ao lidar com nova matéria, precisa de ser suficientemente trabalhada, para reunir as condições necessárias para a compreensão e tratamento do tema afim. O professor manifesta-se como autor responsável pela formação do seu estudante, assumindo a condição de intermediário entre o aluno e a matéria (objeto de tratamento). Fala-se da homogeneização, termo novo ao ser aplicado em áreas afins, respeitando o Princípio da compensação. Neste sentido, a autoria alude a termos de significância particular, de iniciativa em termos de autoria pelo direito próprio – uma vez assimilados providenciam a resolução exitosa das referidas operações em limites.

2 – ABORDAGEM TEÓRICA SOBRE OS PRESSUPOSTOS DA HOMOGENEIZAÇÃO NO TRATAMENTO DE LIMITES

Definição 1: Homogeneização – Seja dada a função $y = f(x)$, contínua em dado intervalo, considera-se termo homogéneo à função $y = f(x)$, o termo $f(a)$ de forma que a diferença dos dois seja decomponível num produto em $(x-a)^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) - f(a) = (x-a)^n q_1(x)$$
$$g(x) - g(a) = (x-a)^n q_2(x)$$
$$f(x) - k = f(x) - f(a) = (x-a)^n q_1(x)$$
$$g(x) - k = g(x) - g(a) = (x-a)^n q_2(x)$$
$$f(x) - g(x) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}} q_1(x) - (x-a)^n q_2(x), a, k \in \mathbb{R}$$

A decomposição de uma soma em produto alude ao processo de anulamento da expressão, para tornar viável a transformação da soma em produto, caso seja aplicável, isto é,

$$f(x) - f(a) = 0$$

Da relação imediatamente anterior, procura-se por um fator que torne a sentença matemática verdadeira. No caso em que;

$$f(x) - g(x) = 0 \Longrightarrow f(a) = g(a) \; para \; x = a$$

Definição 2: Decomposição atómica – é toda decomposição que se apresenta na forma elementar, conforme a função se apresente $y = f(x) \vee y = g(x)$ de:

a) Simples quando:

$$f(x) - f(a) = (x-a)^n q_1(x)$$
$$g(x) - g(a) = (x-a)^n q_2(x)$$

b) Não simples:

$$f(x) - g(x) = (x-a)^n q_1(x) - (x-a)^n q_2(x)$$

Definição 3: Decomposição composta – é toda decomposição que se apresenta na forma de soma de produtos de pelo menos dois fatores em funções, $y = f(x)\ e\ y = g(x)$. Denota-se por:

$$f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) = (x-a)^n f(x) \cdot q_2(x) + g(a)(x-a)^n \cdot q_1(x)$$

Definição 4: Termos compensadores – são dois termos que numa dada expressão matemática não alteram a estrutura inicial para a obtenção de um determinado resultado.

a) Numa soma os termos compensadores são: k e $-k$ simétricos com $k\ real\ e\ k \neq 0$

b) Num produto os termos compensadores são: $k\ e\ k^{-1}$, recíprocos ou inversos com $k\ real\ e\ k \neq 0$

Denota-se por:

i) $f(x) = f(x) - k + k$

ii) $f(x) = f(x).\frac{k}{k}$

Nas duas formas nota-se que dos membros direitos pode-se facilmente retomar os membros esquerdos, a compensação visa a obtenção de resultados preconizados, quer dizer deve-se introduzir termos compensadores de acordo os resultados que se perseguem.

Definição 5: Seja $y = f(x)$ contínua em $(x, a)\ ou\ (a, x)$, quando $x \to a$ e $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{0}{0}$ então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l, \ l \text{ é o valor do limite.}$$

Teorema 1: Seja $y = f(x)$ contínua e k constante real, se $f(x) - k$ é anulável, então;

$$f(x) - k = (x-a)^n q_1(x)$$

Demonstração: Dada a relação matemática anulável, parte-se da condição de que;

$$f(x) - k = 0$$

Fazendo $k = f(a)$, pelo recurso a termos homogéneos de $f(x)$ vem:

$$f(x) - k = f(x) - f(a)$$

Conformando-se com a definição 1, tem-se:

$$f(x) - k = f(x) - f(a) = (x-a)^n q_1(x)$$

Como queríamos demonstrar (c.q.d)

Teorema 2: Sejam $y = f(x)\ e\ y = g(x)$ contínuas, a diferença $f(x) - g(x)$ é decomponível em soma de produtos:

$$f(x) - g(x) = (x-a)^n q_1(x) - (x-a)^n q_2(x)$$

Demonstração: Se a expressão $f(x) - g(x)$ é anulável, assim vem:

$$f(x) - g(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = g(x)$$

Desta feita, admite-se a condição de que;

$$f(a) = g(a)$$

Retoma-se a diferença, introduzindo termos compensadores simétricos

$$f(x) - g(x) = f(x) - f(a) + f(a) - g(x)$$

Como $f(a) = g(a)$ e associando as duas primeiras parcelas e as duas últimas parcelas vem:

$$f(x) - g(x) = [f(x) - f(a)] + [f(a) - g(x)]$$

Substituindo $f(a)$ por $g(a)$ das duas últimas parcelas vem:

$$f(x) - g(x) = [f(x) - f(a)] + [g(a) - g(x)]$$

$$f(x) - g(x) = [f(x) - f(a)] - [g(x) - g(a)]$$

Recorrendo a definição 2, vem:

$$f(x) - g(x) = (x - a)^n q_1(x) - (x - a)^n q_2(x)$$

c.q.d

Teorema 3: Sejam $y = f(x)\, e\, y = g(x)$ contínuas, a diferença de produtos $f(x). g(x) - f(a). g(a)$ é decomponível em soma de produtos e denota-se por:

$$f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) = (x - a)^n f(x) \cdot q_2(x) + g(a)(x - a)^n \cdot q_1(x)$$

Demonstração: Dada a diferença de produtos $f(x). g(x) - f(a). g(a)$, introduzem-se termos simétricos produtos de formas que, o primeiro fator seja o primeiro fator da primeira parcela e, o segundo fator seja o segundo fator da segunda parcela, vice-versa. Neste sentido vem:

$$f(x). g(x) - f(x). g(a) + f(x). g(a) - f(a). g(a) \qquad (1)$$

Associando as duas primeiras parcelas e as duas últimas parcelas, seguidas de suas respetivas factorizações vem:

$$f(x). g(x) - f(x). g(a) + f(x). g(a) - f(a). g(a) = \qquad f(x)[g(x) - g(a)] + g(a)[f(x) - f(a)]$$

Recorrendo a definição 2 vem:

$$f(x)[g(x) - g(a)] + g(a)[f(x) - f(a)] = f(x)(x - a)^n q_2(x) + g(a)(x - a)^n q_1(x)$$

c.q.d

Teorema 4: Sejam $y = f(x)\, e\, y = g(x)$ contínuas em $(x, a)\, ou\, (x, a)$, quando $x \to a$ obtém-se o seguinte limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$$

Demonstração: Dada a razão $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ anulável em cada termo da fração de formas a obter a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Se cada termo é nulo substituindo x por a então, pode-se recorrer a definição 2 para se transformar cada termo de fração em produto.

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^n q_1(x)}{(x-a)^n q_2(x)} = l$$

Simplificando os infinitésimos de cada termo, obtém-se um resultado livre da indeterminação. Sendo que $\frac{q_1(x)}{q_2(x)}$ não manifesta indeterminação, então:

$$\lim_{x\to a}\frac{q_1(x)}{q_2(x)} = \frac{q_1(a)}{q_2(a)} = l$$

c.q.d

2.1 – Apresentação do Quadro Referencial de Resolução de Limites

Nesta secção de texto, apresenta-se diferentes operações de limites, que serão resolvidos a luz de todo referencial teórico embasado em (FLEMMING; GONÇALVES, 2012). Assim, manifesta-se diferentes formas, com vista a aferir os procedimentos aludidos em definições e teoremas, anteriormente colocados.

Parte-se de operações de limites simples para as operações complexas em dois blocos.

2.1.1 – Bloco de limites de funções algébricas racionais e irracionais

1. Resolva os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$?

Resolução:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{2x^2}-2}{\sqrt[4]{4x^2}-2} = \frac{0}{0}$?

Resolução:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{2x^2}-2}{\sqrt[4]{4x^2}-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{8}}{\sqrt[4]{4x^2}-\sqrt[4]{16}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(2x^2)^2}+\sqrt[3]{16x^2}+\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{(2x^2)^2}+\sqrt[3]{16x^2}+\sqrt[3]{64}}$$
$$\cdot\frac{\sqrt[4]{(4x^2)^3}+\sqrt[4]{16\cdot 16x^4}+\sqrt[4]{256\cdot 4x^2}+\sqrt[4]{16^3}}{\sqrt[4]{(4x^2)^3}+\sqrt[4]{16\cdot 16x^4}+\sqrt[4]{256\cdot 4x^2}+\sqrt[4]{16^3}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(2x^2-8)}{(4x^2-16)} \cdot \frac{\sqrt[4]{(4x^2)^3} + \sqrt[4]{16\cdot 16x^4} + \sqrt[4]{256\cdot 4x^2} + \sqrt[4]{16^3}}{\sqrt[3]{(2x^2)^2} + \sqrt[3]{16x^2} + \sqrt[3]{64}}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2(x^2-4)}{4(x^2-4)} \cdot \frac{4\cdot 8}{3\cdot 4} = \frac{4}{3}$$

c) $\lim_{b\to a} \frac{a^n - b^n}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} = \frac{0}{0}$?

Resolução:

$$\lim_{b\to a} \frac{a^n - b^n}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} = \lim_{b\to a} \frac{(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})}{(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})} \cdot \frac{(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \cdots + \sqrt[n]{b^{n-1}})}{(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \cdots + \sqrt[n]{b^{n-1}})}$$

$$= \lim_{b\to a} \frac{(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \cdots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{(a-b)}$$

$$= \lim_{b\to a} (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \cdots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right)$$

$$= (a^{n-1} + a^{n-2}\cdot a + \cdots + a\cdot a^{n-2} + a^{n-1})\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}\cdot a} + \cdots + \sqrt[n]{a^{n-1}}\right)$$

$$= na^{n-1} \cdot na^{\frac{(n-1)}{n}}$$

$$= n^2 a^{\frac{(n^2-1)}{n}}$$

d) $\lim_{x\to 3} \frac{x\cdot\sqrt[3]{3x^2} - 9}{x-3} = \frac{0}{0}$?

Resolução:

Na forma $f(x) - f(a) = (x-a)^n q_1(x)$, introduzindo o termo x no radical e transformando $9 = \sqrt[3]{9^3}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x\cdot\sqrt[3]{3x^2} - 9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{3x^3x^2} - 9}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{3x^5} - \sqrt[3]{9^3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt[3]{3x^5} - \sqrt[3]{9^3}\right)\left(\sqrt[3]{(3x^5)^2} + \sqrt[3]{9^3\cdot 3x^5} + \sqrt[3]{(9^3)^2}\right)}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(3x^5)^2} + \sqrt[3]{9^3\cdot 3x^5} + \sqrt[3]{(9^3)^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{3x^5 - 9^3}{x-3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(3x^5)^2} + \sqrt[3]{9^3\cdot 3x^5} + \sqrt[3]{(9^3)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{3(x^5 - 243)}{x-3} \cdot \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt[3]{(3x^5)^2} + \sqrt[3]{9^3\cdot 3x^5} + \sqrt[3]{(9^3)^2}}$$

$$= \frac{3}{3\cdot 81} \lim_{x\to 3} \frac{x^5 - 3^5}{x-3}$$

$$= \frac{1}{81} \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^4+3x^3+9x^2+27x+81)}{x-3}$$
$$= \frac{1}{81} \cdot \lim_{x\to 3} (x^4+3x^3+9x^2+27x+81)$$
$$= \frac{5\cdot 81}{81} = 5$$

Pautando pela forma:

$$f(x)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(a) = (x-a)^n f(x)\cdot q_2(x) + g(a)(x-a)^n \cdot q_1(x),$$

vem:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x\sqrt[3]{3x^2}-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x\sqrt[3]{3x^2}-3\cdot 3}{x-3}$$

Assim introduz-se termos simétricos compensadores em forma de produto de dois fatores, sendo o primeiro o primeiro fator da primeira parcela e o segundo, o segundo fator da segunda parcela

$$\lim_{x\to 3} \frac{x\sqrt[3]{3x^2}-3\cdot 3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x\sqrt[3]{3x^2}-3x+3x-3\cdot 3}{x-3}$$

Associando duas a duas parcelas vem:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x(\sqrt[3]{3x^2}-3)}{x-3} + \lim_{x\to 3} \frac{3(x-3)}{x-3}$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{x(\sqrt[3]{3x^2}-\sqrt[3]{27})}{x-3} + \lim_{x\to 3} \frac{3(x-3)}{x-3}$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{x(\sqrt[3]{3x^2}-\sqrt[3]{27})}{x-3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(3x^2)^2}+\sqrt[3]{3x^2.27}+\sqrt[3]{27^2}}{\sqrt[3]{(3x^2)^2}+\sqrt[3]{3x^2.27}+\sqrt[3]{27^2}} + \lim_{x\to 3} \frac{3(x-3)}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x(3x^2-27)}{x-3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(3x^2)^2}+\sqrt[3]{3x^2.27}+\sqrt[3]{27^2}} + \lim_{x\to 3} \frac{3(x-3)}{x-3}$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{3.(3x^2-27)}{x-3} \cdot \frac{1}{3.9} + 3$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{3.(x^2-9)}{x-3} \cdot \frac{1}{9} + 3 = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \cdot \frac{1}{3} + 3 = 5$$

2.1.2 – Bloco de limites com funções trigonométricas

Para limites de género, o infinitésimo é sempre de ordem algébrica por equivalência daí vem:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{senx - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{cosx - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$

Homogeneizando as constantes às funções $sena$ e $cosa$, $a = \frac{\pi}{4}$, vem:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{senx - sen\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$; b)$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{cosx - cos\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$

Transformando as somas em produtos vem;

$$senx - sen\frac{\pi}{4} = 2sen\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} cos\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

Quando, $x \to \frac{\pi}{4}$, $sen\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \sim \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}$ a expressão trigonométrica $sen\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}$ transformou-se em algébrica $\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}$.

$$cosx - cos\frac{\pi}{4} = -2sen\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} sen\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{senx - sen\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2sen\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} cos\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2sen\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} cos\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot cos\frac{\pi}{4}}{\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para b):

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{cosx - cos\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(-2)sen\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} sen\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} - \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2sen\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} sen\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = -\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} . sen\frac{\pi}{4}}{\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{senx - cosx}{x - \frac{\pi}{4}}$

Introduz-se termos compensadores simétricos

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{senx - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - cosx}{x - \frac{\pi}{4}}$$

Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação. São Paulo, v. 11, n. 9, set. 2025.
ISSN: 2675-3375

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{senx-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}+\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-cosx}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{senx-sen\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cosx-cos\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{senx\cdot log_3(\frac{486}{\pi}x)-2}{x-\frac{\pi}{6}}$

Para a resolução da operação em causa, impõe-se a seguinte discussão:

1º – Substituir o x pela sua tendência na primeira parcela do numerador

Para $x=\frac{\pi}{6}$ vem:

$$senx.log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)=sen\frac{\pi}{6}\cdot log_3\left(\frac{486}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot 4$$

2º – Decompõe-se a segunda parcela em produto obtido, tal como na primeira parcela

$$2=\frac{1}{2}\cdot 4$$

3º – Manifesta-se a soma e sua decomposição da segunda parcela

$$senx.log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)-2=senx.log_3(\frac{486}{\pi}x)-\frac{1}{2}.4$$ 3455

4º – Seleciona-se fatores viáveis, o primeiro da primeira parcela a combinar com o segundo da segunda parcela, formando infinitésimos.

Da expressão, $senx.log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)-\frac{1}{2}.4$, tem-se:

$$-senx\cdot 4+senx\cdot 4$$

5º– Introduzir os elementos compensadores na expressão

$$senx\cdot log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)-senx\cdot 4+senx\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 4$$

6º– Associar as duas primeiras parcelas e as duas últimas parcelas

$$\left[senx\cdot log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)-senx\cdot 4\right]+\left[senx\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 4\right]$$

7º– Proceder a factorização respetiva e assegurar-se que um dos fatores de cada soma é um infinitésimo quando $x\to\frac{\pi}{6}$.

$$senx\left[log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)- 4\right]+4\left(senx - \frac{1}{2}\right)$$
$$= senx \cdot log_3\left(\frac{\frac{486}{\pi}x}{81}\right)+4\cdot 2sen\left(\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right)$$

Sendo que:

$$log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)- 4 = log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)- log_3^{81} = log_3\left(\frac{486}{81\pi}x\right)$$

$$senx - \frac{1}{2} = senx - sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2sen\left(\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right)$$

$log_3\left(\frac{\frac{486}{\pi}x}{81}\right)$ e $sen\left(\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\right)$ são infinitésimos para $x \to \frac{\pi}{6}$

8º – Inserir na operação a referida transformação

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{senx\cdot\ log_3(\frac{486}{\pi}x) - 2}{x-\frac{\pi}{6}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{senx\cdot\ log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)- senx\cdot\ 4+senx\cdot 4-4\cdot\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$$

9º– Resolver o limite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{senx\cdot log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)- senx\cdot 4+senx\cdot 4-4\cdot\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\left[senx\cdot\ log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)- senx\cdot\ 4\right]+\left[senx\ \cdot\ 4-4\cdot\frac{1}{2}\right]}{x-\frac{\pi}{6}}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{senx\cdot\left[log_3\left(\frac{486}{\pi}x\right)- log_3 81\right]+4\left[senx\ -\frac{1}{2}\right]}{x-\frac{\pi}{6}}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{senx\cdot\left[log_3\left(\frac{\frac{486}{\pi}x}{81}\right)\right]+4\left[2sen\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\cdot cos\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right]}{x-\frac{\pi}{6}}$$

Fazendo $log_3\left(\frac{\frac{486}{\pi}x}{81}\right) = log_3\left(1+\frac{\frac{486}{\pi}x}{81}-1\right) = log_3\left(1+\frac{486x- 81\pi}{81\pi}\right)$

Fazendo a mudança de bases vem:

$$log_3\left(1+\frac{486x - 81\pi}{81\pi}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{486x-81\pi}{81\pi}\right)}{ln3}$$

Fazendo a equivalência para $x \to \frac{\pi}{6}$ tem-se:

3456

$$\ln\left(1+\frac{486x-81\pi}{81\pi}\right)\sim\frac{486x-81\pi}{81\pi}=\frac{6x-\pi}{\pi}$$

$$sen\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\sim\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{senx.\left[log_3\left(\frac{486}{\frac{\pi}{81}}x\right)\right]+4\left[2sen\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}.cos\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right]}{x-\frac{\pi}{6}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{senx\cdot\left[\frac{\ln\left(1+\frac{486x-81\pi}{81\pi}\right)}{ln3}\right]+4\left[2\cdot\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\cdot cos\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right]}{x-\frac{\pi}{6}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{1}{2ln3}\cdot\left[\ln\left(1+\frac{486x-81\pi}{81\pi}\right)\right]+4\left[2\cdot\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right]}{x-\frac{\pi}{6}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{1}{2ln3}\cdot\left[\frac{6x-\pi}{\pi}\right]}{x-\frac{\pi}{6}}+\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{6}{2\pi ln3}+2\sqrt{3}=\frac{3}{\pi ln3}+2\sqrt{3}.$$

3457

e) $\lim_{x\to3}\frac{x.tg(\frac{\pi}{12}x)-3}{x-3}$

Resolução:

$$\lim_{x\to3}\frac{x\cdot tg(\frac{\pi}{12}x)-3.1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x\cdot tg\left(\frac{\pi}{12}x\right)-x\cdot1+x\cdot1-3\cdot1}{x-3}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x\cdot\left[tg\left(\frac{\pi}{12}x\right)-1\right]+(x-3)}{x-3}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x.\left[tg\left(\frac{\pi}{12}x\right)-tg(\frac{\pi}{4})\right]+(x-3)}{x-3}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x\cdot\left[tg\left(\frac{\pi}{12}x\right)-tg(\frac{\pi}{4})\right]}{x-3}+\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x-3}$$

Como; $tg\alpha-tg\beta=\frac{sen(\alpha-\beta)}{cos\alpha\cdot cos\beta}$ vem:

$$\lim_{x\to3}\frac{x\cdot\left[tg\left(\frac{\pi}{12}x\right)-tg(\frac{\pi}{4})\right]}{x-3}+1$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x\cdot\dfrac{sen(\frac{\pi}{12}x-\frac{\pi}{4})}{cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\cdot cos\frac{\pi}{4}}}{x-3}+1$$

Para $x \to 3,\quad sen\left(\frac{\pi}{12}x-\frac{\pi}{4}\right)\sim\frac{\pi}{12}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}(x-3)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x\cdot sen(\frac{\pi}{12}x-\frac{\pi}{4})}{x-3}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\cdot cos\frac{\pi}{4}}+1$$

Recorrendo a equivalência, simplificando e substituindo a variável independente pela sua tendência vem:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x\cdot\frac{\pi}{12}(x-3)}{x-3}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\cdot cos\frac{\pi}{4}}+1$$

$$\lim_{x\to 3}x\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\cdot cos\frac{\pi}{4}}+1$$

$$3\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot 3\right)\cdot cos\frac{\pi}{4}}+1=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}+1$$

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}+1=\frac{\pi}{2}+1=\frac{\pi+2}{2}$$

f) $\lim_{x\to 4}\frac{x.cotg(\frac{\pi}{16}x)-2.\log_2(7x-24)}{2^{x-4}-3^{x-4}}=\frac{0}{0}?$

Deve-se introduzir os termos compensadores aos dois termos da fração em busca do infinitésimo. Saiba-se que, se $x\to 4$, então $x-4$ é infinitésimo

$$\lim_{x\to 4}\frac{x\cdot cotg\left(\frac{\pi}{16}x\right)-4+4-2\cdot\log_2(7x-24)}{2^{x-4}-3^{x-4}}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left[x\cdot cotg\left(\frac{\pi}{16}x\right)-4\right]+[4-2\cdot\log_2(7x-24)]}{(2^{x-4}-1)+(1-3^{x-4})}$$

Multiplicando os dois termos pelo infinitésimo vem:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left[x\cdot cotg\left(\frac{\pi}{16}x\right)-4\right]+[4-2\cdot\log_2(7x-24)]}{(2^{x-4}-1)+(1-3^{x-4})}\cdot\frac{x-4}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\dfrac{\left[x\cdot cotg\left(\frac{\pi}{16}x\right)-4\right]+\left[4-\ 2\cdot\log_2(7x-24)\right]}{x-4}}{\dfrac{(2^{x-4}-1)+(1-\ 3^{x-4})}{x-4}}$$

Resolvendo parcialmente as quatro operações de limites vem:

$$\text{I) }\lim_{x\to 4}\frac{x\cdot cotg\left(\frac{\pi}{16}x\right)-4\cdot 1}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x\cdot cotg\left(\frac{\pi}{16}x\right)-x\cdot 1+x\cdot 1-4\cdot 1}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x\cdot\left[cotg\left(\frac{\pi}{16}x\right)-1\right]+(x-4)}{x-4}$$

$$cotg\left(\frac{\pi}{16}x\right)-1=cotg\left(\frac{\pi}{16}x\right)-cotg(\frac{\pi}{4})$$

$$cotg\left(\frac{\pi}{16}x\right)-cotg\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{sen(\frac{\pi}{16}x-\frac{\pi}{4})}{sen\left(\frac{\pi}{16}x\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x\cdot\left[\dfrac{sen(\frac{\pi}{16}x-\frac{\pi}{4})}{sen\left(\frac{\pi}{16}x\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right]}{x-4}+\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{16}x-\frac{\pi}{4}\right)\sim\frac{\pi}{16}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{16}(x-4)$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x\cdot\frac{\pi}{16}(x-4)}{x-4}\cdot\frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{16}x\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}+1$$

$$\lim_{x\to 4}x\cdot\frac{\pi}{16}\cdot\frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{16}x\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}+1$$

$$4\cdot\frac{\pi}{16}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}+1=\frac{\pi+2}{2}$$

$$\text{II) }\lim_{x\to 4}\frac{4-\ 2\cdot\log_2(7x-24)}{x-4}$$

$$\text{III) }\lim_{x\to 4}\frac{2^{x-4}-1}{x-4}$$

$$\text{IV) }\lim_{x\to 4}\frac{1-\ 3^{x-4}}{x-4}$$

Para II):

$$\lim_{x\to4}\frac{4-\ 2\cdot\log_2(7x-24)}{x-4}$$
$$\lim_{x\to4}\frac{\log_2 16-\ \log_2(7x-24)^2}{x-4}$$
$$\lim_{x\to4}\frac{\log_2\left[\frac{16}{(7x-24)^2}\right]}{x-4}$$

P ara este limite, pode-se também aplicar o limite fundamental algébrico

$$\text{II)}\lim_{x\to4}\frac{1}{x-4}\log_2\left[1+\frac{16-(7x-24)^2}{(7x-24)^2}\right]$$

$$\log_2\left\{\left[\lim_{x\to4}\left[1+\frac{16-(7x-24)^2}{(7x-24)^2}\right]^{\frac{1}{\frac{16-(7x-24)^2}{(7x-24)^2}}}\right]^{\frac{\frac{16-(7x-24)^2}{(7x-24)^2}}{x-4}}\right\}$$

$$\log_2 e^{\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{\frac{16-(7x-24)^2}{(7x-24)^2}}{x-4}\right)}$$

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{\frac{16-(7x-24)^2}{(7x-24)^2}}{x-4}\right)=\lim_{x\to4}\left[\frac{\frac{(4-7x+24)(4+7x-24)}{(7x-24)^2}}{x-4}\right]$$

$$\lim_{x\to4}\left[\frac{\frac{-7(x-4)(7x-20)}{(7x-24)^2}}{x-4}\right]=-\frac{56}{16}=-\frac{7}{2}$$

Logo:

$$\log_2 e^{\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{\frac{16-(7x-24)^2}{(7x-24)^2}}{x-4}\right)}=\log_2 e^{-\frac{7}{2}}=-\frac{7}{2}\log_2 e$$

Para III):

$$\lim_{x\to4}\frac{2^{x-4}-1}{x-4}$$

Pode-se recorrer a equivalência ou ainda ao limite fundamental algébrico

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ também com as suas fórmulas derivadas}$$

$$2^{x-4} - 1 \sim (x-4)ln2$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)ln2}{x-4} = ln2$$

Para IV):

$$\lim_{x\to 4}\frac{1-\ 3^{x-4}}{x-4}$$

Também se recorre a equivalência ou ainda ao limite fundamental algébrico

$$-\lim_{x\to 4}\frac{3^{x-4}-1}{x-4}$$

$$3^{x-4} - 1 \sim (x-4)ln3$$

$$-\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)ln3}{x-4} = -ln3$$

No entanto, o resultado é:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\dfrac{\left[x.cotg\left(\frac{\pi}{16}x\right)-4\right]+[4-\ 2.\log_2(7x-24)]}{x-4}}{\dfrac{(2^{x-4}-1)+(1-\ 3^{x-4})}{x-4}} = \frac{\frac{\pi+2}{2}-\frac{7}{2}\log_2 e}{ln2-ln3}$$ 3461

$$= \frac{\frac{\pi+2}{2}-\frac{7}{2}\log_2 e}{ln2-ln3} = \frac{7\log_2 e - 2 - \pi}{2(ln3-ln2)}$$

A resolução de limites ora apresentada, leva o estudante e não só a resolvê-los sem ter de recorrer à teorias ainda não vistas, no caso da Teoria das Derivadas pelo recurso ao método de L'Hospital, tal recurso torna os estudantes menos reflexivo por ser imediato demais, uma vez que os estudantes estão ainda na fase propedêutica de aprendizagem do conteúdo sobre os limites.

3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

1. A resolução de operações deve ser feita com procedimentos próprios na fase em que se implementa aprendizagem sem extrapolações.
2. O recurso ao método de L'Hospital, normalmente, deve ser usado quando:
   a) Os atores de ensino e aprendizagem querem confirmar os resultados;
   b) Os atores de ensino e aprendizagem já abordaram a Teoria de Derivadas Aprendizagem, não constituindo a resolução de limites pelos métodos próprios um problema.

3. As definições, os teoremas e as suas respetivas demonstrações constituem ferramentas básicas para a resoluções de limites afins.
4. O adestramento dos estudantes, com base neste corpo teórico, potencia os estudantes a viabilizar a resoluções de limites que obedeçam o formato em causa e não só.
5. A produção do artigo, resultou de muitas reflexões em função das dificuldades que os estudantes sempre apresentaram.
6. A produção do referido artigo, decorrendo do ponto 5, resultou na iniciativa de desenvolver aulas pautada pela criatividade, ancorada na experiência pedagógica de um dos autores.
7. A consequência do ponto 6, fez maximizar os resultados de pesquisas bibliográficas para aferir a estes resultados.

REFERÊNCIAS

1. BARANNENKOV G, DEMIDOVITCH B, et al. Problemas e exercícios de análise matemática. 1993.
2. BRONSTEIN I, SEMENDIAEV K. Manual de matemática para engenheiros estudantes. [s.l.]: [s.n.]; [s.d.].
3. FLEMMING DM, GONÇALVES MB. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração. 2012.
4. FLEMMING DM, GONÇALVES MB. Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, curvilíneas e de superfícies. 2011.
5. PISKUNOV N. Cálculo diferencial e integral. Tomo I. [s.l.]: [s.n.]; [s.d.].
6. PISKUNOV N. Cálculo diferencial e integral. Tomo II. [s.l.]: [s.n.]; [s.d.].
7. SCHOR D, TIZZIOTTI JG. Matemática segundo grau. Vol. II. [s.l.]: [s.n.]; [s.d.].

Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação. São Paulo, v. 11, n. 9, set. 2025.
ISSN: 2675-3375