Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação

Revista Ibero- Americana de Humanidades, Ciências e Educação- REASE

OPEN ACCESS

doi.org/10.51891/rease.v10i5.13898

CANTOR NA SALA DE AULA: TRANSFORMANDO CONCEITOS ABSTRATOS EM FERRAMENTAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

CANTOR IN THE CLASSROOM: TRANSFORMING ABSTRACT CONCEPTS INTO TOOLS FOR TEACHING MATHEMATICS

CANTOR EN EL AULA: TRANSFORMANDO CONCEPTOS ABSTRACTOS EN HERRAMIENTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Thiago Santos[1]
Luiz Gustavo de Oliveira Carneiro[2]
Gustavo de Souza[3]

RESUMO: O presente estudo se debruça sobre a potencialidade da teoria abstrata dos conjuntos com base ternária como um instrumento pedagógico capaz de elucidar conceitos matemáticos intrincados de maneira mais palpável e intuitiva. Embora possa, a princípio, aparentar desconexão com a realidade concreta, o método dos conjuntos com base ternária demonstra significativa pertinência em múltiplos domínios da matemática. Ao perscrutar conjuntos infinitos e suas propriedades no contexto da base ternária, descortina-se a oportunidade de explorar uma compreensão mais aprofundada e abrangente de diversas temáticas, abarcando a noção de infinito, desmistificando a abstração percebida e desvelando a elegância intrínseca à matemática. Será evidenciado que a abordagem dos conjuntos com base ternária, marcada por sua ênfase no raciocínio lógico e rigoroso, pode enriquecer substancialmente a experiência educacional, proporcionando aos discentes um alicerce robusto no estudo de variados conceitos nas séries iniciais do ensino fundamental.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Conjuntos de Cantor. Base Ternária.

ABSTRACT: The present study focuses on the potential of the abstract theory of ternary-based sets as a pedagogical tool capable of elucidating intricate mathematical concepts in a more tangible and intuitive manner. Although it may initially appear disconnected from concrete reality, the method of ternary-based sets demonstrates significant relevance in multiple domains of mathematics. By scrutinizing infinite sets and their properties in the context of the ternary base, the opportunity to explore a deeper and more comprehensive understanding of various themes unfolds, encompassing the notion of infinity, demystifying the perceived abstraction, and unveiling the intrinsic elegance of mathematics. It will be evidenced that the approach of ternary-based sets, characterized by its emphasis on logical and rigorous reasoning, can substantially enrich the educational experience, providing students with a robust foundation in the study of diverse concepts in the early grades of elementary school.

Keywords: Mathematics education. Cantor sets. Ternary base.

[1]Doutor em Matemática. Professor Associado na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Membro do Grupo Estudos em Ensino de Matemática (GEEM). Lattes: http://lattes.cnpq.br/6151202558192410 Orcid: https://orcid.org/0000-0002-2435-2786.
[2]Doutor em Matemática. Professor na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Membro do Grupo Estudos em Ensino de Matemática (GEEM). Lattes: http://lattes.cnpq.br/6376736788409767. Orcid: https://orcid.org/0009-0005-4526-0580.
[3]Doutor em Física. Professor na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Membro do Grupo Estudos em Ensino de Matemática (GEEM). Lattes: http://lattes.cnpq.br/1982291012091908 Orcid: https://orcid.org/0000-0003-4054-3184.

RESUMEN: El presente estudio se enfoca en el potencial de la teoría abstracta de conjuntos con base ternaria como una herramienta pedagógica capaz de elucidar conceptos matemáticos intrincados de una manera más palpable e intuitiva. Aunque al principio pueda parecer desconectado de la realidad concreta, el método de los conjuntos con base ternaria demuestra una relevancia significativa en múltiples dominios de las matemáticas. Al escudriñar conjuntos infinitos y sus propiedades en el contexto de la base ternaria, se abre la oportunidad de explorar una comprensión más profunda y abarcadora de diversos temas, abarcando la noción de infinito, desmitificando la abstracción percibida y desvelando la elegancia intrínseca de las matemáticas. Se evidenciará que el enfoque de los conjuntos con base ternaria, caracterizado por su énfasis en el razonamiento lógico y riguroso, puede enriquecer sustancialmente la experiencia educativa, proporcionando a los estudiantes una base sólida en el estudio de diversos conceptos en los primeros grados de la escuela primaria.

Palabras clave: Educación matemática. Conjuntos de Cantor. Base ternaria.

INTRODUÇÃO

Considerado um dos matemáticos mais influentes da história, Georg Cantor de família de origem judaica, nasceu em 1845 na cidade de São Petersburgo, Rússia. A família mudou-se para Frankfurt, Alemanha, quando Cantor tinha 11 anos, onde ele frequentou o Realschule e demonstrou um talento precoce para a matemática. Anos após, ingressaria na Universidade de Berlim para estudar matemática, filosofia e física. Teve forte influência do Karl Weierstrass, que se tornou seu mentor. Concluiu sua tese de doutorado em 1867 sobre teoria dos números, orientada por Eduard Kummer. Pouco tempos depois, um cargo na Universidade de Halle, em 1869, onde permaneceu pelo resto de sua carreira acadêmica.

Foi durante seu tempo em Halle que Cantor desenvolveu suas teorias revolucionárias sobre conjuntos infinitos. No entanto, suas ideias não foram bem recebidas por muitos de seus contemporâneos, e enfrentou uma forte oposição, particularmente de Leopold Kronecker. Apesar desses desafios, Cantor persistiu em seu trabalho e, finalmente, ganhou reconhecimento por suas contribuições. Em 1904, ele recebeu a Medalha Sylvester da Royal Society, um dos mais altos prêmios em matemática (FERREIRÓS, 2007, p. 315).

Embora não tenha sido plenamente apreciado em vida, o legado de Cantor é imenso. Suas teorias sobre conjuntos infinitos não apenas revolucionaram a matemática, mas também tiveram profundas implicações filosóficas e teológicas. Até os dias atuais, Cantor é reconhecido como um dos matemáticos mais originais e influentes de todos os tempos, e suas ideias continuam a moldar nossa compreensão do infinito.

Uma das contribuições mais notáveis de Cantor foi o desenvolvimento da teoria dos conjuntos transfinitos. Ele introduziu a noção de cardinalidade, que é uma medida do "tamanho" de um conjunto, e mostrou que existem diferentes "tamanhos" de infinito (SUPPES, 2012). Através dos seus estudos ficou provado o conjunto dos números naturais (1, 2, 3, ...) tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números inteiros (..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...), apesar do último parecer "maior". Ele chamou essa cardinalidade de "aleph-zero" ($\aleph_0$). Na sequência, conseguiu também demonstrar que o conjunto dos números reais (que inclui os números irracionais como π e $\sqrt{2}$) tem uma cardinalidade maior que $\aleph_0$. Ele chamou essa cardinalidade de "aleph-um" ($\aleph_1$) e conjecturou que não havia cardinalidades entre $\aleph_0$ e $\aleph_1$. Tal hipótese ficou mais conhecida como "Hipótese do Contínuo. Essa questão permaneceu em aberto por décadas até que Paul Cohen provou, em 1963, que a Hipótese do Contínuo é independente dos axiomas padrão da teoria dos conjuntos (COHEN, 2008).

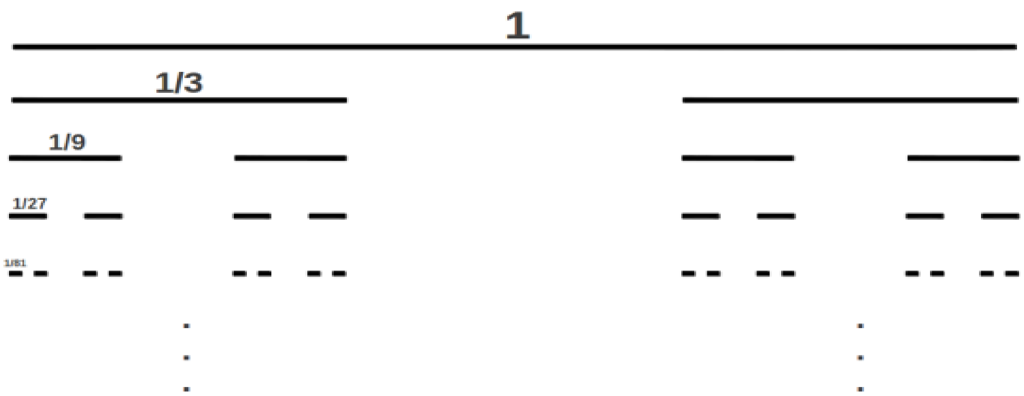
A relação entre as investigações de Georg Cantor sobre conjuntos transfinitos e o conjunto singular que ele concebeu no intervalo (0,1), conhecido como "poeira de Cantor", é deveras fascinante e paradoxal. Esse construto matemático peculiar, que prefigurou a noção de fractalidade, ilustra com eloquência as ideias revolucionárias do matemático germânico acerca da natureza do infinito e suas gradações. A gênese da poeira de Cantor remonta ao processo iterativo de remoção do terço médio aberto de um segmento de reta, ad infinitum. Mais precisamente, considere-se o intervalo [0,1]. Na primeira etapa, extirpa-se o terço médio (1/3, 2/3), restando dois segmentos: [0, 1/3] e [2/3, 1]. Na segunda iteração, removem-se os terços médios de cada um desses segmentos remanescentes, e assim sucessivamente, numa recorrência que se estende ao infinito (CORDEIRO et al., 2022). O resultado desse processo é um conjunto de pontos remanescentes com propriedades notáveis tais como totalmente desconexo e não enumerável.

Neste prisma, almejamos, por intermédio deste estudo, transmutar a noção etérea da relação do conjunto com base ternária em um coadjuvante no processo de ensino de conjuntos numéricos, viabilizando aos discentes do ensino médio de instituições educacionais públicas a possibilidade de explorar facetas alternativas desse tema. Ao longo desta jornada, buscaremos elucidar conceitos complexos, retificar equívocos gramaticais e aprimorar a legibilidade do texto, assegurando uma compreensão cristalina do conteúdo abordado. Destarte, nosso desígnio precípuo é fomentar uma experiência de aprendizado enriquecedora e cativante, que transcenda as fronteiras do conhecimento usual sobre conjuntos numéricos e instigue a curiosidade intelectual dos estudantes acerca da relação do conjunto com base ternária.

A POEIRA DE CANTOR CLÁSSICO

A construção do conjunto de Cantor parte de um segmento de reta, convencionalmente o intervalo unitário [0,1]. Na primeira etapa, o terço médio desse segmento é removido, resultando em dois subintervalos: [0,1/3] e [2/3,1]. Subsequentemente, o mesmo procedimento é aplicado a cada um desses subintervalos remanescentes, ad infinitum. Assim, na segunda iteração, os segmentos [1/9,2/9] e [7/9,8/9] são suprimidos; na terceira, eliminam-se os intervalos [1/27,2/27], [7/27,8/27], [19/27,20/27] e [25/27,26/27]; e assim por diante, em um processo que se estende indefinidamente. Ilustramos tal procedimento na figura 1.

Figura 1: Ilustração do Conjunto de Cantor Clássico



1792

Fonte: https://mathemathgeeks16.wordpress.com/, acesso em 21/04/2024.

O resultado desse algoritmo recursivo é um conjunto de pontos, que denotaremos por C, com propriedades notáveis pontuadas por DE ALMEIDA & Santos (2017), tais como:

- Não-vazio;
- Não contem intervalos;
- Perfeito, ou seja, todo ponto é de acumulação;

ENSINO DA BASE TERNÁRIA COM VINCULAÇÃO AO CONJUNTO DE CANTOR

A base ternária é um sistema de numeração posicional que utiliza três dígitos distintos: 0, 1 e 2. Diferentemente da base binária, que emprega apenas dois dígitos (0 e 1), e da base decimal, que faz uso de dez dígitos (0 a 9). Sendo um pouco mais preciso, dado um $x \in [0,1]$, sempre é possível escreve-lo da forma

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

onde cada $a_i \in \{0,1,2\}$.

É muito comum escrever $x = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$, chamando de sequência ternária, a qual representa a mesma somatória acima.

Evidentemente que podemos pegar um numero na base decimal e colocar na base 3, e vice-versa. Por exemplo, o número ternário 120_3 é equivalente a $1\times3^2 + 2\times3^1 + 0\times3^0 = 9 + 6 + 0 = 15$ na base decimal. Por outro lado, para converter um número da base 10 para a base 3, podemos empregar o método das divisões sucessivas. Esse algoritmo consiste em dividir repetidamente o número decimal por 3, registrando os restos obtidos em cada divisão. O processo é repetido até que o quociente se torne 0. Ao final, a leitura dos restos em ordem inversa fornece a representação do número na base ternária.

Vejamos um exemplo prático para consolidar o entendimento. Vamos converter o número decimal 45 para a base 3. O procedimento abaixo está ilustrado na figura 2.

Passo 1: Dividir 45 por 3 e registrar o resto.

$45 \div 3 = 15$ (resto 0)

Passo 2: Dividir o quociente (15) por 3 e registrar o resto.

$15 \div 3 = 5$ (resto 0)

Passo 3: Dividir o novo quociente (5) por 3 e registrar o resto.

$5 \div 3 = 1$ (resto 2)

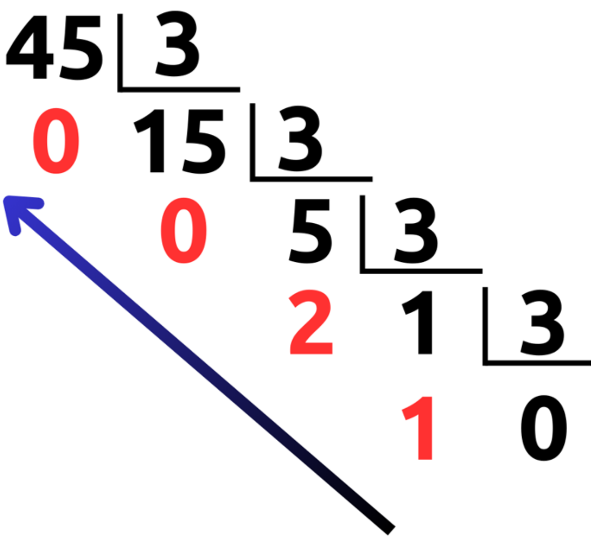
Passo 4: Dividir o quociente (1) por 3 e registrar o resto.

$1 \div 3 = 0$ (resto 1)

Como o último quociente é 0, encerramos o processo. Agora, lemos os restos obtidos em ordem inversa:

$45_{10} = 1200_3$

Figura 2: Mudança de base



Fonte: Autoria própria

Passando agora para nossa vinculação com o ensino de matemática, veremos a relação entre a base ternária e o conjunto de Cantor, que reside na forma como os elementos desse conjunto podem ser representados. Cada elemento desse conjunto pode ser univocamente identificado por uma sequência infinita de dígitos ternários, utilizando apenas os algarismos 0 e 2. O dígito 1 é excluído dessa representação, pois corresponde aos segmentos removidos durante o processo de construção do conjunto (PEITGEN et al., 2013).

Deste modo, a sequência ternária 0,020222... representa um elemento específico do conjunto de Cantor. O dígito 0 denota que o ponto pertence ao terço esquerdo do segmento, enquanto o dígito 2 indica que o ponto se encontra no terço direito. A ausência do dígito 1 na sequência reflete a remoção sistemática dos terços médios ao longo do processo de construção do conjunto (MOSSULIN & MEDEIROS, 2023).

REFLEXÕES E PERSPECTIVAS

A teoria dos conjuntos é um ramo fundamental da matemática, que estuda as propriedades e relações entre coleções de objetos. Seu estudo é essencial para o desenvolvimento do pensamento lógico e para a compreensão de conceitos mais avançados, como funções, relações e estruturas algébricas. No entanto, o ensino desse tópico também apresenta desafios consideráveis. É importante que os professores busquem estabelecer relações entre a teoria dos conjuntos e outros ramos da matemática, bem como com situações práticas e problemas do dia a dia, na esteira de vincular um conjunto de não intuitivo como o conjunto de canto com a base 3.

Diante desses desafios, é fundamental refletir sobre estratégias e abordagens que possam contribuir para um ensino mais efetivo da base ternária e da teoria dos conjuntos. Algumas possibilidades incluem:

1. Uso de recursos didáticos diversificados: A utilização de materiais concretos, jogos, softwares educacionais e outras ferramentas pode auxiliar na compreensão e assimilação desses conceitos pelos estudantes (OLIVEIRA; SANTOS, 2022). Esses recursos permitem uma abordagem mais lúdica e interativa, favorecendo o engajamento e a participação dos alunos.

2. Contextualização e interdisciplinaridade: É importante buscar conexões entre a base ternária, a teoria dos conjuntos e outras áreas do conhecimento, como a lógica, a computação e a filosofia (SILVA; ALMEIDA, 2019). Isso pode tornar esses tópicos mais significativos e relevantes para os estudantes, além de promover uma visão mais integrada e holística da matemática.

3. Formação continuada dos professores: É essencial investir na capacitação e atualização dos docentes, para que eles possam aprofundar seus conhecimentos sobre a base ternária e a teoria dos conjuntos, bem como desenvolver estratégias pedagógicas eficazes

(FERREIRA; CARVALHO, 2021). Isso pode envolver a participação em cursos, workshops, grupos de estudo e outras iniciativas de desenvolvimento profissional.

4. Pesquisas e inovações curriculares: É necessário fomentar pesquisas que investiguem as dificuldades e possibilidades no ensino da base ternária e da teoria dos conjuntos, buscando identificar abordagens inovadoras e eficazes (PEREIRA; NEVES, 2020). Além disso, é importante repensar os currículos de matemática, de modo a garantir um espaço adequado para esses tópicos e promover uma aprendizagem mais significativa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, foram exploradas e analisadas minuciosamente diversas estratégias pedagógicas no âmbito do ensino da matemática, com ênfase particular no caso da associação de um conceito abstrato, como o conjunto de Cantor, à base ternária. Tais abordagens inovadoras e criativas possuem o potencial de contribuir significativamente para que o ensino da base ternária e da teoria dos conjuntos se torne mais acessível, significativo e pertinente para os discentes, proporcionando-lhes uma compreensão mais profunda e duradoura desses tópicos complexos e desafiadores.

É imperativo ressaltar a imprescindibilidade de prosseguir examinando e aperfeiçoando continuamente as práticas pedagógicas atinentes à base ternária e à teoria dos conjuntos, a fim de garantir que essas estratégias estejam sempre alinhadas com as necessidades e expectativas dos estudantes, bem como com os avanços mais recentes no campo da educação matemática. Somente mediante um empenho incessante, meticuloso e colaborativo, abarcando docentes, pesquisadores e gestores educacionais, será exequível fomentar um ensino de matemática mais eficaz, expressivo e transformador, que habilite os estudantes para os desafios multifacetados e em constante evolução do século vigente.

Nesse contexto, é fundamental que os educadores estejam preparados para adotar e adaptar essas estratégias pedagógicas em suas práticas cotidianas, levando em consideração as particularidades e demandas específicas de seus alunos, bem como os recursos e limitações inerentes a cada ambiente educacional. Além disso, é essencial que os pesquisadores continuem a investigar e avaliar a eficácia dessas abordagens, buscando identificar possíveis lacunas, desafios e oportunidades de aprimoramento, a fim de subsidiar o desenvolvimento de práticas ainda mais robustas e efetivas.

Por fim, é crucial que os gestores educacionais estejam comprometidos em fornecer o suporte necessário para a implementação bem-sucedida dessas estratégias pedagógicas, garantindo que os educadores tenham acesso a recursos adequados, oportunidades de formação continuada e condições de trabalho propícias para o exercício pleno de suas funções. Somente por meio dessa sinergia entre todos os atores envolvidos no processo educacional, será possível promover uma verdadeira transformação no ensino da matemática, capacitando os estudantes para enfrentar os desafios do presente e do futuro com confiança, criatividade e competência.

REFERÊNCIAS

COHEN, P. J. **Set Theory and the Continuum Hypothesis**. [s.l.]: Courier Corporation, 2008.

CORDEIRO, C. A. B.; KLIPE, I.; NUNES, I. L. R.; Czuy, L.C. Uma Investigação Sobre O Raciocínio Matemático Em Atividades Exploratórias Envolvendo Fractais. **Revista Experiências em Ensino de Ciências**, v. 17, n. 1, 2022.

DE ALMEIDA, E. C.; SANTOS, T. Uma breve introdução ao Conjunto de Cantor. **Revista De Matemática Da UFOP - RMAT**, v. 4, n. 1, 2017.

FERREIRA, A. C.; CARVALHO, L. M. Formação continuada de professores para o ensino da teoria dos conjuntos: um estudo de caso. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 2, p. 187-205, 2021.

FERREIRÓS, J. **Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics**. [s.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

MOSSULIN, Â.V. L.; de MEDEIROS, L. F. O ensino de Geometria Fractal na Educação Básica: uma revisão sistemática de literatura. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 9, n. 2, p. e2004, 2023.

NEVES, R. S. P.; PEREIRA, J. S. O ensino da teoria dos conjuntos: desafios e perspectivas. **Zetetiké**, v. 26, n. 3, p. 546-560, 2018.

OLIVEIRA, M. S.; SANTOS, F. R. Recursos didáticos para o ensino da base ternária: uma revisão sistemática. **Revista de Educação Matemática**, v. 19, n. 1, p. 78-91, 2022.

PEITGEN, H; JÜRGENS, H; SAUPE, D. **Chaos and Fractals: New Frontiers of Science**. [s.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

SILVA, M. R.; ALMEIDA, J. S. A teoria dos conjuntos e suas conexões com outras áreas da matemática: uma abordagem interdisciplinar. **Bolema**, v. 33, n. 65, p. 1278-1295, 2019.

SUPPES, P. **Axiomatic Set Theory**. [s.l.]: Courier Corporation, 2012.