Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação

Revista Ibero- Americana de Humanidades, Ciências e Educação- REASE

OPEN ACCESS

doi.org/10.51891/rease.v9i6.10328

O LEMA DE KAPLANSKY AUXILIANDO NUMA QUESTÃO DA OMIF

Antonio Rennan Sales[1]
Jairo Carlos de Oliveira Quintans[2]
Renan Fernandes[3]

RESUMO: Muitas das questões de matemática são capazes de irem além, abrangendo certos aspectos que inicialmente não apresentam muita correlação entre si. O presente artigo tem como intuito apresentar uma questão da OMIF, Olímpiada de Matemática dos Institutos Federais, e como a sua resolução é uma boa oportunidade para apresentar ao aluno tópicos especiais do ensino de Matemática e que nesse caso, tem com o objetivo de iniciar os estudos sobre o lema de Kaplansky.

Palavras-chave: Combinatória. Ensino. Olímpiada.

ABSTRACT: Many of the math questions are capable of going further, covering certain aspects that initially do not correlate very well with each other. he purpose of this article is to present a question from OMIF, the Mathematics Olympiad of the Federal Institutes, and how its resolution is a good opportunity to introduce the student to special topics in mathematics teaching, and in this case, to initiate studies on Kaplansky's lemma.

Keywords: Combinatorics. Teaching. Olympiad.

ENUNCIADO

Isabela deseja contar quantas sequências podem ser formadas, usando-se exatamente quatro das 26 letras do alfabeto da lingua portuguesa, com as caracteristicas abaixo:

- as quatro letras devem aparecer em ordem alfabética, da esquerda para direita;
- as letras devem ser distintas e não podem ser consecutivas.

Ela começou a listar algumas das sequências: “aceg”, “amor”, bjmw”, “jouz”, “nprv”. Isabela percebeu que existiam muitos e resolveu então, realizar esta contagem utilizando seus conhecimentos de análise combinatória. Desta forma, ela

[1]Especialista em Geometria Euclidiana Plana pela Universidade Regional do Cariri - URCA
[2]Mestre em Modelagem Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
[3]Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Cariri - UFCA

pôde concluir corretamente que o total de sequências com as características expostas é:

a) 7315 b) 8855 c) 14950 d) 274560 e) 358800

UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO

Essa é um tipo de questão em que a teoria básica de combinatória como permutações e combinações simples, não ajudam muito, visto que só esses artifícios podem demandar bastante tempo.

Um candidato mais desatento poderia pensar da seguinte forma: como são quatro letras, poderíamos pensar em quatro espaços possíveis para preencher cada letra, como segue o esquema a seguir:

_____ _____ _____ _____

Como o alfabeto tem 26 letras (e isso ele já afirma no próprio enunciado), então usando o conceito de permutação temos 26 opções de escolha para a primeira letra. Como não podemos repetir a letra então, no segundo espaço temos 25 opções de escolha e assim por diante, fechando o seguinte raciocínio abaixo:

<u>26</u> 25 <u>24</u> <u>23</u>

Pelo princípio multiplicativo chegamos no resultado de 358800. Assim, o candidato marcaria imediatamente a letra e. Mas é necessário contarmos também os "saltos", logo a característica de não ser consecutiva nos leva a um trabalho quase que hercúleo. Então para solucionar tal problema, utilizaremos o chamado Primeiro Lema de Kaplansky.

LEMA DE KAPLANSKY

Dado um conjunto $\{1,2,3,4,\ldots,n\}$ *onde* $n \in N$, a quantidade de p-subconjuntos nos quais não há números consecutivos é dada pela expressão abaixo:

$$K(n,p) = C^{p}_{n-p+1}$$

DEMONSTRAÇÃO

Antes de iniciarmos com a explanação da demonstração, seguimos com esta ideia.

Escrevemos uma fila com n "sinais". Por exemplo, sendo n = 5 teríamos isso:

$$+ \, - \, - \, + \, - \quad (1)$$

Onde o sinal de + representa que o número faz parte do conjunto e o sinal – indica que o número não está no conjunto. Então, pegando o nosso exemplo acima, com n = 5 temos o conjunto $\{1,2,3,4,5\}$. Assim, a representação (1) significa que temos o seguinte conjunto $\{1,4\}$, já que apenas há dois "sinais" de +, representando o 1 e o 4.

Generalizando, o que queremos é que entre dois sinais de + tenha pelo menos um sinal -. Sendo assim, considere k – sinais +:

$$\ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots$$

Podemos ter sinais – entre dois sinais +, à esquerda do + ou à direita do +.

Chamaremos de:

X_1 = a quantidade de sinais à esquerda de +

X_2 = a quantidade de sinais entre dois sinais +

...

Seguiremos a sequência até um X_{p+1}. Ficando dessa forma:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{p-1} + X_p + X_{p+1} \quad (2)$$

Sobre X_2 e X_p queremos que haja pelo menos um sinal -. Sobre X_1 e X_{p+1} temos que $X_1 \geq 0 \; e \; X_{p+1} \geq 0$.

Então de 2 obtemos a equação abaixo:

$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{p-1} + X_p + X_{p+1} = n - p$ (3), onde n – p nos dá o total de sinais -.

Queremos ver de quantas formas podemos resolver: o primeiro e último termos da equação podemos reescrever desta forma:

$$(X_1' - 1) + X_2 + X_3 + \ldots + X_{p-1} + X_p + (X_{p+1}' - 1) = n - p$$

Retirando dos parênteses e somando – 2 a ambos os membros da equação obtemos:

$$X_1' + \ldots.. + X_{p+1}' = n - p + 2$$

O primeiro membro temos que:

$$\binom{n-p+2-1}{p} = k \quad (4)$$

Definindo (4) como:

$K(n, p)$

Então chegamos na expressão pretendida:

$$K(n, p) = C_{n-p+1}^{p}$$

Provando assim nosso lema.

SOLUÇÃO

Esse lema consegue ser um importante auxiliar para o desenvolvimento da resolução. Nesse caso teríamos n = 26 e p = 4. Logo:

$$C_{23}^{4} = \frac{23!}{4!\,19!} = \frac{23.22.21.20.19!}{4.3.2.1.19!}$$

Cancelando os termos iguais e fazendo o restante dos cálculos chegamos no resultado 8855, que é de fato a alternativa correta.

CONCLUSÃO

Como podemos ver, questões que são apresentadas ao alunos nas séries da educação básica podem constituir uma importante ferramenta para a elaboração e exploração de conteúdos mais significativos e abrangentes. As questões de Olímpiadas, bem como algumas questões do próprio Enem, podem servir de auxílio para mostrar que a Matemática pode ser mais do que um sistema de repetições. Tais questões podem servir de auxílio no entendimento de alguns conteúdos vistos no ensino médio e também, por consequência, podem ajudar a revelar novos talentos para a ciência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LAGES LIMA, Elon; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. **A Matemática do Ensino Médio vols. 1, 2, 3.** Rio de Janeiro, IMPA, SBM, 1991.

D'ÁMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática.** 8 ed. Campinas; Papirus, 2012.

Olímpiada de Matemática do Institutos Federais OMIF 2021. Instituto Federal do Sul de Minas.

Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação. São Paulo, v.9.n.06. jun. 2023.
ISSN - 2675 – 3375