

## O JOGO TORRE DE HANÓI COMO FERRAMENTA MEDIADORA NO ENSINO DE POTÊNCIAS: UM ESTUDO COM OS ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NÍVEL II

### THE TOWER OF HANOI GAME AS A MEDIATING TOOL IN TEACHING POWERS: A STUDY WITH STUDENTS OF THE 6TH YEAR OF FUNDAMENTAL EDUCATION LEVEL II

Carlos Alberto Ribeiro<sup>1</sup>  
Afonso Ribeiro Damasceno Neto<sup>2</sup>  
Iris Neles Silva<sup>3</sup>  
Lucineide Silva de Lima<sup>4</sup>  
Maria José Monteiro Dantas<sup>5</sup>  
Vania Duarte da Silva<sup>6</sup>

**RESUMO:** A matemática tem um papel extremamente importante na vida dos indivíduos desde seus primórdios, auxiliando o homem a compreender todas as áreas de sua vida. Na contemporaneidade, a matemática tem se aprimorado e encontrado outras maneiras de proporcionar o saber, seja pela tecnologia, aulas, como também em jogos, que é o tema desse trabalho acadêmico, mostrar como o jogo Torre de Hanói pode ser uma ferramenta mediadora no ensino de potências para alunos do ensino fundamental. Nesse artigo, procurou-se ver uma forma de fixar o conteúdo com o auxílio do jogo, já que o objetivo foi facilitar o aprendizado dos alunos. Para a coleta de dados foram utilizadas observações, registros de imagens e registro das situações relevantes em um diário de bordo, que é um caderno ou pasta em que o estudante registra as etapas que realiza no desenvolvimento de algum projeto. Os resultados apresentados apontam que é possível despertar o interesse pela matemática utilizando como recurso metodológico o jogo citado.

2710

**Palavras-chave:** Matemática. Jogo. Aprendizado. Torre de Hanoi. Ensino.

<sup>1</sup>Professor do Ensino Básico do seletivo da Prefeitura do Natal/RN (SME) e Professor do Ensino Básico do seletivo do Estado/RN (SEEC/RN) Graduado em Licenciatura em Matemática pela UFERSA 2014.1 Graduado em Licenciatura em Computação pela UFERSA 2018.1 Graduado em Licenciatura em Pedagogia pela Faculdade IBRA de Brasília- FIBRAS (Credenciada pela Portaria nº 822 de 14/10/2020). Pós-graduado em Práticas Assertivas em Gestão da Educação Profissional Integrada à Educação de Jovens e Adultos (EJA) pelo IFRN 2019/1 Pós-graduado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática pelo IFRN 2019.2 Pós-graduado em Tecnologia em Educação pela Faculdade IBRA de Tecnologia – FITEC – (Portaria nº 1.096 de 03/09/2008) – D.O.U de 04/09/2008). Mestrando em Ciência da Educação e-mail:

<sup>2</sup> Graduado em Física licenciatura pela UFRN 2002/2005 Professor efetivo do Estado RN e Município Parnamirim Mestre em Ciências da educação Doutoranda em Ciências da educação pela ESL-Assessoria e Consultoria Educacional

<sup>3</sup>Graduada em Letras Português UFRN 1986/1990 Professora efetiva do Estado RN Pós-graduada em Gestão escolar com coordenação pedagógica Pós-graduada em Psicopedagogia Pós-graduada em Educação especial Pós-graduada em Educação Infantil Pós-graduada em Educação e novas tecnologias Mestra em Ciências da educação Doutoranda em Ciências da educação pela ESL-Assessoria e Consultoria Educacional.

<sup>4</sup> Graduada em pedagogia – UNINASSAU 2006/2010 Professora contratada São Jose de Mipibu. Pós-graduada em Psicopedagogia Pós-graduada em Educação e desenvolvimento em políticas educativas. Pós-graduada em Libras Mestra em Ciências da educação. Doutoranda em Ciências da educação pela ESL-Assessoria e Consultoria Educacional

<sup>5</sup>Graduada em Filosofia da Educação -UVA (Universidade Estadual Vale do Acaraú) - conclusão ano 2004. Pós-graduada em Psicopedagogia Pós-graduada em Docência do Ensino Superior Mestra em Ciências da educação. Doutoranda em Ciências da educação pela ESL-Assessoria e Consultoria Educacional.

<sup>6</sup> Graduada em Pedagogia pela UFRN Professora efetiva do Município Baía Formosa. Pós-graduada em coordenação pedagógica pela FAL – Faculdade Alencarina de Sobral. Mestra em educação ESL – Instituto Superior de Educação Doutoranda em Ciências da educação pela ESL-Assessoria e Consultoria Educacional

**ABSTRACT:** Mathematics has played an extremely important role in the lives of individuals since its beginnings, helping man to understand all areas of his life. Nowadays, mathematics has improved and found other ways to provide knowledge, whether through technology, classes, but also in games, which is the subject of this academic work, to show how the game Tower of Hanoi can be a mediating tool in teaching of powers for elementary school students. In this article, we tried to see a way to fix the content with the aid of the game, since the objective was to facilitate students' learning. For data collection, observations, image records and recording of relevant situations were used in a logbook, which is a notebook or folder in which the student records the steps he takes in the development of a project. The results presented show that it is possible to arouse interest in mathematics using the game mentioned as a methodological resource.

**Keywords:** Mathematics. Game. Learning. Tower of Hanoi. Teaching.

## INTRODUÇÃO

A prática docente é uma atividade que deve ser feita com o objetivo de alcançar a aprendizagem do aluno, desenvolvendo competências e habilidades capazes de formar cidadãos conscientes dos seus papéis na sociedade.

Assim, a matemática tem papel indispensável na formação do indivíduo. Ela tem auxiliado o ser-humano na compreensão do mundo e contribuído de maneira significativa para a sociedade. Sabe-se que a disciplina de matemática é de extrema importância e que o ambiente que proporciona o contato com essa disciplina é o escolar. É na escola que são transmitidos os conhecimentos matemáticos, formais e sistematizados, desenvolvidos no decorrer da história.

No entanto, a elevada carga horária semanal e a grande quantidade de conteúdos matemáticos podem dificultar a busca, do professor de matemática, por novas estratégias e recursos que contribuam para o ensino da matemática, muitas vezes o professor precisa “vencer” esses conteúdos em um bimestre ou trimestre. Pode-se dizer que os conteúdos matemáticos são abordados predominantemente através de listas de exercícios, e como recursos didáticos/metodológicos o quadro de giz e os cadernos são, certamente, os mais utilizados. Nesse caso as “receitas” de ensino utilizadas em anos anteriores são repetidas nos anos consecutivos. Segundo D’Ambrosio (1989, p.01) “[...] Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas se reduz a procedimentos determinados pelo professor”.

Tal colocação não tem intenção em soar como uma crítica ao professor, porém é necessária uma busca constante por encaminhamentos metodológicos e práticas que

auxiliem os alunos na compreensão da matemática, de forma que eles consigam associá-la ao contexto em que estão inseridos na sala de aula.

Considerando a quantidade de informações e tecnologias que os alunos atualmente têm acesso, o contexto escolar não pode ser distinto dessa realidade. O ensino da matemática precisa ser atrativo, despertar a curiosidade, desenvolver o raciocínio lógico e acompanhar àquelas situações extraescolares, vivenciadas por esses alunos as quais lhes proporcionam satisfação, respeitando seus interesses.

A preocupação com as formas e meios de ensinar e aprender conceitos matemáticos não é novidade, há muito tempo pesquisadores tem dedicado seus estudos na busca por recursos e encaminhamentos metodológicos que colaborem para a qualidade no ensino da matemática. Segundo Silveira e Miola (2008, p.50) “[...] muitas dessas práticas vêm sendo desenvolvidas no Brasil, especialmente a partir da década de 1970”. Através de intercâmbio com educadores matemáticos do exterior originou-se, no Brasil, alguns grupos de estudos que foram delineando o que chamamos de tendências em Educação Matemática. (FIORENTINI e LORENZATO, 2006).

Uma das tendências em Educação Matemática, bastante relatadas em artigos, teses e dissertações, são os jogos na Educação Matemática. Os jogos configuram uma excelente ferramenta auxiliadora no processo de ensino e aprendizagem. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998) ressaltam que os jogos podem ser considerados encaminhamentos metodológicos mediadores no processo de ensino e aprendizagem. Os jogos desenvolvem a capacidade de elaborar estratégias, solucionar problemas e promovem momentos de interações sociais.

Crianças jovens e adolescentes gostam de jogar, unir essa estratégia ao ambiente de aprendizagem promove o enriquecimento das aulas de matemática.

Neste sentido, este artigo apresenta os resultados de uma intervenção pedagógica, a qual aborda na prática as vantagens que os jogos aliados ao ambiente de ensino e aprendizagem da disciplina de matemática, proporcionam. O estudo foi desenvolvido pelo pressuposto da pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, junto a 18 estudantes de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental Nível II, de uma escola privada que está locada na zona norte de Natal no Estado do Rio Grande do Norte (RN). Utilizamos o jogo Torre de Hanói para amenizar as dificuldades de ensino nos alunos no que diz respeito ao assunto de potenciação. A investigação teve como objetivos aplicar, contextualizar e fixar este conteúdo

com o auxílio do jogo. O interesse a pesquisa partiu da indagação de alguns alunos dessa classe acerca da aplicação da potenciação em situações além da sala de aula.

Para a coleta de dados foram utilizadas observações, registros de imagens e registro das situações relevantes em um diário de bordo, que é um caderno ou pasta em que o estudante registra as etapas que realiza no desenvolvimento de algum projeto. Os resultados apresentados apontam que é possível despertar o interesse pela matemática utilizando como recurso metodológico o jogo. Em seguida, veremos a fundamentação teórica desse trabalho acadêmico e logo após a metodologia, apontando como foi feita a pesquisa e obtidos os resultados para formação de um conceito.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A torre de Hanói é muito importante na disciplina de matemática, haja vista que constitui num jogo estratégico capaz de contribuir no desenvolvimento da memória, do planejamento e solução de problemas através de técnicas estratégicas.

Contudo, PCN (BRASIL, 1998, p. 06) ressaltam que: “[...] para as crianças o jogo é muito prazeroso instigante e genuíno, pois gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da educação e do convívio escolar”. Nesta perspectiva, Bini (2016) salienta:

[...] a importância dos jogos matemáticos na educação básica, como os jogos facilitam a compreensão de determinados conceitos matemáticos, ajudando o aluno a se identificar com o conteúdo. Visto que as crianças atualmente estão em um meio tecnológico muito desenvolvido que proporciona divertimento, diante disso, percebe-se que a matemática aos olhos dos alunos é muito monótona, e acreditamos que metodologias diferenciadas como os jogos são importantes para motivar e instigar o interesse do aluno pela matemática (BINI, 2016, p. 02)

Assim, a utilização da Torre de Hanói para o ensino de conceitos da Matemática se justifica pelo fato de ser um jogo e possuir características, propriedades e regras específicas, capazes de contribuir significativamente para o aprendizado no Ensino de Matemática.

A torre de Hanói hoje no século XXI é de suma importância, haja vista que constitui num jogo estratégico capaz de contribuir no desenvolvimento da memória, do planejamento e solução de problemas através de técnicas estratégicas. Assim, o jogo mais simples é constituído de três pinos, mas a quantidade pode variar, deixando o jogo mais difícil à medida que os discos aumentam. Assim, a Torre de Hanói, também conhecida por torre do bramanismo ou quebra- cabeças do fim do mundo, aparece publicada em 1883 pelo matemático francês Eduard Lucas.

Todavia, existem várias transformações sobre esta lenda, tendo como exemplo, algumas histórias, em que o templo era uma casa e os sacerdotes eram os religiosos; o templo pode estar em diversas partes no universo. Para Cabral et al (2006):

Os monges deveriam cumprir esta tarefa movendo um disco em exatamente uma unidade de tempo e de maneira mínima, ou seja, eles utilizavam uma regra de movimentação que produzia o menor número possível de movimentos (CABRAL, 2006, et al, p. 33).

A Torre de Hanói é considerada, por estudiosos, como um valioso recurso didático-metodológico para o ensino de conceitos matemáticos por induzir o aluno a perceber as leis matemáticas a ele relacionadas, sobretudo, trabalhar com o desenvolvimento de habilidades mentais, tais como: desenvolver um plano de ação durante as jogadas, capacidade de concentração, o trabalho com algoritmos matemáticos, estabelecer relações interpessoais em um trabalho colaborativo e promover o desenvolvimento da capacidade cognitiva.

Ainda, uma das vantagens que o jogo Torre de Hanói é que contribui para o ensino e aprendizagem da matemática, e também para a formação geral dos sujeitos no desenvolvimento de habilidades relacionadas ao raciocínio, resolução de problemas e criatividade.

A Torre de Hanói pode ser aplicada em vários níveis de desenvolvimento com crianças, adolescente e até adultos. Na pré-escola, com separação de cores e tamanhos, a torre de Hanói ajuda em questões de coordenação motora, identificação de formas, ordem crescente e decrescente, entre outras formas de aprendizado regras simples de uma maneira mais ampla, o jogo pode ser usado para o estabelecimento de estratégias de transferência das peças, como a contagem dos movimentos e raciocínio.

Ainda, uma das vantagens que o jogo Torre de Hanói é que contribui para o ensino e aprendizagem da matemática, e também para a formação geral dos sujeitos no desenvolvimento de habilidades relacionadas ao raciocínio, resolução de problemas e criatividade.

Segundo José e Coelho (1997) há inúmeros fatores que influenciam na aprendizagem, dentre eles os autores destacam os orgânicos que envolvem a condição física, as emoções e até mesmo a alimentação, os psicológicos que envolvem a ansiedade, angustia, depressão entre outras e por fim os ambientais que envolvem a comunidades onde mora, a influência dos meios de comunicação.

A característica marcante do jogo é uso de regras. Para que determinada atividade configure um jogo ela deve possuir regras, podendo ser simples ou complexas. Para Kishimoto (2017, p.26):

A existência de regras em todos os jogos é uma característica marcante. Há regras explícitas, como no xadrez ou amarelinha, regras implícitas como na brincadeira de faz de conta, em que a menina se faz passar pela mãe que cuida da filha. São regras internas, ocultas, que ordenam e conduzem a brincadeira. (KISHIMOTO, 2017, p.26).

Então, considerando as características do jogo e sua sistematização entende-se que eles podem ser utilizados além da recreação, podem ser explorados no contexto educacional no que se refere ao ensino e aprendizagem. Segundo Ribeiro (2012, p.17) “[...] a inserção de jogos no contexto escolar aparece como uma possibilidade altamente significativa no processo de ensino e aprendizagem, ao mesmo tempo em que se aplica ideia de aprender brincando, contribui-se para o desenvolvimento cognitivo, afetivo e social dos alunos”.

Um fator relevante a se considerar ao utilizar o jogo no contexto educacional é a promoção das interações sociais. Na visão sócio-histórica, Vygotski (1994) aponta que as interações sociais potencializam os processos de desenvolvimento do homem.

Na matemática o uso dos jogos pode contribuir na relação ensino e aprendizagem. O jogo por si, desperta o interesse no jogador e no contexto educacional, este elemento apresenta-se como um resgate ao prazer em aprender matemática, além disso, cria espaços para a imaginação possibilitando ao jogador um nível de abstração útil ao desenvolvimento cognitivo. (GRANDO, 1995).

Seguindo esse contexto de jogos criando espaços para imaginação e desenvolvimento cognitivo, Ribeiro (2012) diz que as atividades com jogos são um caminho para o desenvolvimento de resolução de problemas. Ao utilizar esse instrumento pode-se naturalmente solucionar um problema que se encontra inserido no jogo, sendo que essa abordagem pode ser entendida como ponto de partida da atividade matemática. Um jogo, nas aulas de matemática, pode ser utilizado para dar a introdução, o desenvolvimento ou a fixação de conceitos matemáticos.

Entretanto, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998, p.46), apontam que os jogos são:

Uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de

forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46)

De fato, o jogo pode ser considerado um instrumento metodológico que colabora para o desenvolvimento da matemática escolar, segundo Viginheski (2014, p.83) ele “[...] contribui ainda para a formação do pensamento lógico-matemático, o exercício da argumentação e da organização do pensamento, tomada de atitudes, necessárias para a aprendizagem da Matemática”.

Como se percebe, os conteúdos matemáticos abordados no contexto escolar não podem ser dispersos, distantes da realidade dos alunos, do cotidiano, daquilo que desperta o interesse e que lhes proporciona prazer. Nesse sentido o jogo é também uma maneira de aproximar a matemática escolar com o dia a dia desses alunos.

Savi & Ulbricht (2008) elencaram alguns benefícios que os jogos educativos podem trazer para o processo de ensino e aprendizagem, são eles: efeito motivador, facilitador da aprendizagem, desenvolvimento de habilidades cognitivas, aprendizado por descoberta, experiência de novas identidades, socialização, coordenação motora, comportamento expert.

Em seguida veremos o tópico da metodologia, onde será abordado as etapas de preparação do trabalho, como as informações que foram colhidas até chegar a conclusão final.

2716

## METODOLOGIA

A coleta de dados foi realizada através de observações, registros de imagens e anotações em um diário de bordo, é um local onde são registradas etapas de projetos. Assim, os participantes desta pesquisa foram os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental Nível II de uma escola da rede privada de ensino na zona norte de Natal no Rio Grande do Norte (RN). O conteúdo abordado foi o de potenciação. A escolha do conteúdo se deu a partir da curiosidade desses alunos no uso da operação de potência fora do contexto escolar.

Então, a pesquisa foi realizada em três etapas. A primeira (1ª) foi o conteúdo de potenciação que foi transmitido aos alunos utilizando como recursos a explanação oral, quadro branco, lápis pilotos e o material apostilado; a segunda (2ª) foi realizada com intervenção pedagógica, abordando o conteúdo de potenciação utilizando como recurso metodológico o jogo Torre de Hanói e a terceira (3ª) foi o desenvolvimento da análise das contribuições que o jogo trouxe as aulas de matemática para a compreensão do conteúdo de potenciação.

Entretanto, a coleta de dados ocorreu durante a primeira e segunda etapa da pesquisa. E a terceira e última etapa apresenta a análise dos resultados. Então, a seguir vejamos o desenvolvimento de cada etapa como já foi mencionada acima nesta pesquisa.

## PRIMEIRA ETAPA: APRESENTAÇÃO DO CONTEÚDO DE POTENCIAÇÃO.

A potenciação ou a exponenciação é uma forma de representar multiplicações em que todos os fatores são iguais, Giovanni, Giovanni Junior e Castrucci (2015), destacam que dados dois números naturais  $a$  e  $n$  (com  $n > 1$ ), a expressão  **$a^n$**  representa um produto de  $n$  fatores iguais ao número  $a$ , ou seja:

$$a^n = a.a.a.a.a. \quad n \text{ fatores}$$

Quando um número precisa ser multiplicado várias vezes por ele mesmo dá-se o nome de potenciação. Assim, também chamado de exponenciação, a operação visa facilitar a multiplicação de uma série de números iguais.

Dessa forma, ao abreviar uma sequência numérica com fatores iguais, utilizamos a representação  $a^n$ . Nesse sentido,  $a$  se refere ao número real. Enquanto isso,  $n$  é o número natural. Ou seja, em uma potenciação, existe a base, o expoente e a potência. Assim, quando se tem uma sequência de vários números à potenciação serve para simplificar os cálculos no momento da multiplicação e divisão.

No entanto, o conteúdo de potenciação é trabalhado no 6º ano do Ensino Fundamental, através de observações, constatamos que o material didático (apostila) adotado pela escola onde se efetivou a pesquisa, trazia o conteúdo de potenciação principalmente, a partir de exercícios de repetição. No processo de aprendizagem da matemática a repetição pode ser necessária em alguns casos, porém o ensino não pode ser restrito a repetições. A contextualização e aplicabilidade dos conteúdos são fundamentais para o ensino de matemática de qualidade que gere significado aos alunos.

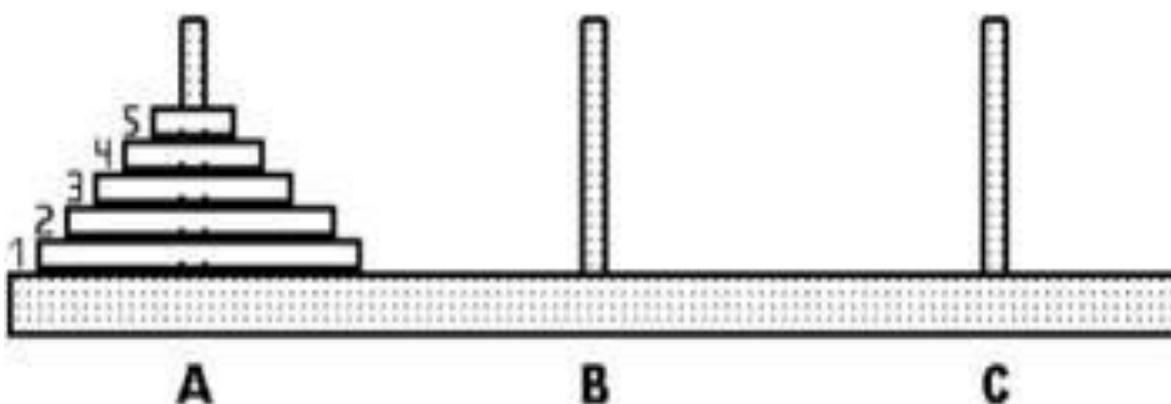
Assim, a primeira etapa da pesquisa teve duração de três aulas nas quais o conteúdo de potenciação foi abordado com a turma do 6º ano predominantemente através da explanação oral e quadro branco com lápis pilotos. Com esses recursos foram trabalhados o cálculo, identificação dos termos e leitura de uma potência. Foram realizados exemplos no quadro branco e em seguida foi proposto aos alunos que solucionassem os exercícios apresentados na apostila. Enfim na primeira etapa foi “cumprido” o que o material didático (apostila) propunha.

Ainda, no decorrer dessas três aulas os alunos apresentaram dúvidas no processo da realização do cálculo da potência. Em alguns momentos, esses alunos, multiplicavam a base da potência por seu respectivo expoente ao invés de realizar a multiplicação dos fatores iguais. Foi necessário retomar algumas vezes o algoritmo da potenciação no quadro branco utilizando exemplos numéricos até que todos os alunos realizassem os cálculos corretamente.

## SEGUNDA ETAPA: INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA UTILIZANDO O JOGO TORRE DE HANÓI

Todavia, após as aulas sobre os conceitos de potências e resolução dos exercícios pelos alunos, já descritos na seção anterior, iniciamos a intervenção pedagógica, que configura a segunda etapa desse estudo e que teve duração de três aulas.

Figura 1 – Torre de Hanói



2718

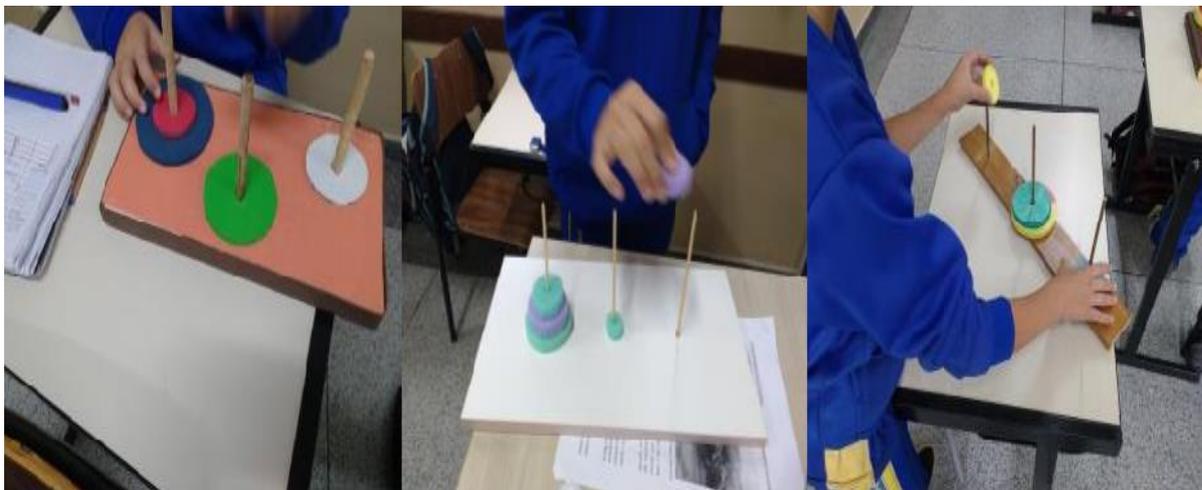
Este jogo tem como objetivo, mover todos os discos do pino A para o pino C seguindo determinadas regras: 1ª) Somente um disco pode ser movido de cada vez; 2ª)

Um disco maior não pode ser posto sobre um disco menor. É possível perceber que esta atividade lúdica, configura um jogo, pois conforme a classificação proposta por Kishimoto (2017) é provido de regras. Conforme as regras, considerando a figura 1, o disco de número 5, jamais poderá ficar embaixo de um dos discos que possui numeração menor, portanto o jogador precisa estar atento a cada mudança dos discos.

Assim, antes de iniciar a intervenção pedagógica, ainda no período da primeira etapa da pesquisa, foi solicitado aos alunos participantes desse estudo que realizassem uma breve pesquisa envolvendo o jogo Torre de Hanói e suas regras. Em seguida foi solicitado a esses alunos que construíssem as suas próprias torres de hanói, como tarefa para casa,

preferencialmente com materiais recicláveis. Como podemos ver na figura 2 apresenta alguns jogos confeccionados pelos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental Nível II.

**Figura 2** – Jogo Torre de Hanói confeccionado pelos alunos.



**Fonte:** Acervo dos autores

Entretanto, após todos os alunos confeccionarem seus jogos e estarem com eles em mãos foi dado início a intervenção pedagógica. Na primeira aula da intervenção foi permitido que os alunos manuseassem o jogo, aplicando as regras, as quais eles haviam pesquisado. Foi proposto a esses alunos o desafio de resolver o “quebra- cabeça” torre de Hanói, primeiramente transpondo dois discos de um pino ao outro com o menor número possível de movimentos. Com apenas dois discos os alunos conseguiram desenvolver com bastante rapidez de agilidade e todos obtiveram que três era o número mínimo de movimentos.

Em seguida foi proposto aos alunos que realizassem a transposição, agora com três discos e todos os alunos concluíram que sete era o número mínimo de movimentos.

O desafio continuou, mas agora com quatro discos. Porém com quatro discos, os alunos demoraram mais do que nos dois casos anteriores, e apresentaram diferentes repostas, como 20 movimentos, 17 movimentos, até que após algumas tentativas, concluíram que o número mínimo de movimentos era quinze.

Na sequência foi solicitado aos alunos que o quebra-cabeça fosse realizado com cinco discos. À medida que aumentavam o número de discos os alunos se mostravam mais empolgados. Todos buscavam com rapidez o desafio proposto. A figura 4 apresenta um dos alunos resolvendo o quebra cabeça com cinco discos.

**Figura 4** – Aluno em atividade com o jogo Torre de Hanói



**Fonte:** Acervo dos autores

Assim como com quatro discos, os alunos demoraram mais tempo e apresentaram diferentes respostas, como 33, 41, 44, 47 e 48 movimentos. Por fim um dos alunos conseguiu transpor todos os discos de um pino para o outro com 31 movimentos. Motivados pelo colega os demais alunos também conseguiram com essa quantidade de movimentos. Concluíram então que o número mínimo de movimento para cinco discos era 31 movimentos.

Para finalizar a primeira aula da intervenção pedagógica foi solicitado a esses alunos que construíssem uma tabela com o número de discos e o número mínimo de movimentos para cada quantidade de discos, conforme a tabela 1.

**Tabela 1** - Número mínimo de movimento dos discos.

Número de discos	Número mínimo de movimentos
2	3
3	7
4	15
5	31

**Fonte:** Elaborada pelos autores

Ao término da aula os alunos foram questionados acerca dos conteúdos matemáticos que poderiam ser abordados com este jogo. Alguns alunos responderam que poderiam estudar as formas geométricas circulares, o diâmetro de cada disco, a contagem ao mover cada disco, além de elencarem o desenvolvimento do raciocínio lógico e da coordenação motora, porém nenhum deles mencionou que o jogo poderia abordar a potenciação.

Bem, na segunda aula da intervenção pedagógica, foi solicitado aos alunos que observassem a tabela construída por eles na aula anterior e que analisassem se havia relação entre o número de discos e o número mínimo de movimentos. Em um primeiro momento os alunos perceberam que à medida que aumentava o número de peças aumentava também

o número mínimo de movimentos. Nesse momento foi necessária a mediação do professor, mostrando que na realidade o número mínimo de movimentos pode ser calculado através de uma expressão numérica envolvendo a potenciação. O número mínimo de movimentos é calculado através da potência de base 2, com expoente igual ao número de discos menos o número 1.

Assim, foi explorado no quadro branco o número mínimo de movimentos para dois e três discos: para 2 discos:  $2^2 - 1 = 3$  movimentos; para 3 discos:  $2^3 - 1 = 7$  movimentos. Após a explanação desses dois casos foi solicitado que os alunos desenvolvessem os cálculos necessários para 4, 5 e 6 discos. A figura 5 apresenta uma tabela construída por um dos alunos com os respectivos cálculos.

### Torre de Hanói

Figura 5 – Tabela elaborada por um aluno

Números de Discos	Número Mínimo de Jogada
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

2721

Fonte: Acervo dos autores

Utilizando a expressão numérica, então foram obtidos os cálculos abaixo: Para  $n = 2$ , temos:

$$2^n - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3;$$

Para  $n = 3$ , temos:

$$2^n - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7;$$

Para  $n = 4$ , temos:

$$2^n - 1 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15;$$

Para  $n = 5$ , temos:

$$2^n - 1 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31;$$

Para  $n = 6$ , temos:

$$2^n - 1 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63.$$

Todavia, para dar continuidade foi proposto aos alunos que desenvolvessem uma expressão para o número mínimo de jogadas com 7, 10 e 100 discos. Os alunos apresentaram as expressões corretamente:  $2^7 - 1$ ;  $2^{10} - 1$ ;  $2^{100} - 1$ . Constatamos que os alunos compreenderam que existe uma expressão matemática que é capaz de calcular o número mínimo de movimentos conforme a quantidade de discos. Foi proposto a esses alunos que desenvolvessem uma expressão que permitisse calcular a quantidade mínima de movimentos para qualquer quantidade de discos, por exemplo, para “n” discos e após alguns instantes os alunos apresentaram a expressão  $2n - 1$ .

Ao término da aula observamos que os alunos participaram ativamente das atividades propostas e que se sentiram desafiados a solucionar o “quebra-cabeça” à medida que aumentava a quantidade de discos nos pinos. Além disso, demonstraram surpresa e empolgação ao perceberem que eles poderiam calcular a quantidade mínima de movimentos dos discos utilizando um cálculo matemático simples o qual aborda a potenciação.

Portanto, embora a potenciação tenha sido o principal conteúdo matemático abordado nessa aula, foi possível dar uma breve introdução aos conceitos de generalizações e fórmulas matemáticas.

### TERCEIRA ETAPA: ANÁLISE DAS CONTRIBUIÇÕES DO JOGO AS AULAS DE MATEMÁTICA

Durante o desenvolvimento da intervenção pedagógica com o auxílio do jogo Torre de Hanói, foi possível perceber a empolgação dos alunos ao trabalharem com um objeto diferenciado na aula. A escolha do jogo ou qualquer tipo de material concreto a ser utilizado nas aulas de matemática deve ser bem pensado e planejado, pois conforme Fiorentini e Miorim (1990, p.02) “[...] por trás de cada material, se esconde uma visão de educação, de matemática, do homem e de mundo; ou seja, existe subjacente ao material, uma proposta pedagógica que o justifica”.

O jogo trouxe as aulas de matemática momentos de desenvolvimento do raciocínio lógico e coordenação motora, para Grandó (1995, p.155) “[...] a competição inerente aos jogos garante- lhes o dinamismo, o movimento, proporcionando o interesse e envolvimento natural do aluno e contribuindo para o seu desenvolvimento social, intelectual e afetivo”.

Uma das preocupações desse estudo estava em mostrar aos alunos que a matemática escolar pode ser utilizada além das “paredes da escola”, segundo D’Ambrosio (1985, p.15) “na matemática escolar o aluno não vivencia situações de investigação exploração e

descobrimto”, evidentemente essa situação não pode ser generalizada, mas infelizmente é o que o ocorre na maioria das escolas. Ao relacionar o conteúdo de potenciação com a fórmula matemática utilizada para prever a quantidade mínima de movimentos, para cada quantidade de discos, no jogo Torre de Hanói, os alunos puderam verificar na prática uma das aplicações que possui esse conteúdo. Nesse sentido os alunos constataram a aplicabilidade da matemática escolar, mesmo fora do contexto da escola.

Por fim, os jogos proporcionaram momentos de interações sociais, descontração, descaracterizando a formalidade excessiva que por ventura possa haver nas aulas de matemática.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

A pesquisa em tela está de acordo com as orientações curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 28) onde:

O jogo oferece o estímulo propício que favorece o desenvolvimento espontâneo e criativo dos alunos e permite ao professor ampliar seu conhecimento de técnicas ativas de ensino, desenvolver capacidades pessoais e profissionais para estimular nos alunos a capacidade de comunicação e expressão, mostrando-lhes uma nova maneira lúdica, prazerosa e participativa, de relacionar-se com o conteúdo escolar levando a uma maior apropriação dos conhecimentos envolvidos.

2723

Uma das finalidades do ato da docência é fazer da escola um ambiente de motivação viva. É desafiá-la a mudar sua pedagogia de repasse de conhecimento, sendo capaz de inovar-se, na ação promover a capacidade de saber pensar, em aprender para intervir e assim transformar suas relações.

Apresentamos nossa proposta para o ensino-aprendizado do conteúdo de Potência pelo viés do jogo lúdico Torre de Hanoi, exploramos o histórico do referido jogo e respectivas regras, bem como em aula expositiva relacionamos o jogo e as funções. Tomamos por visão de aula expositiva os relatos de Freire e Shor (1996), quando versam que na aula expositiva dialógica o professor (a) também entra com o saber, mas ao mesmo tempo participa de um processo de reaprender, em síntese, se estimula o compartilhamento de conhecimentos e a reelaboração dos mesmos a partir dos conteúdos aprendidos.

Escolhemos o jogo Torre de Hanoi para o estudo das Potências porque é versátil e pode ser empregado para os diferentes seguimentos e séries, além do mesmo atende adequadamente os objetivos dos conteúdos do estudo para com as Potências Matemáticas. Para Saviani (1991) se é verdade que a escolha dos meios depende dos objetivos, também é

verdade que a consecução dos objetivos depende da escolha e, mais do que isso, do uso dos meios, ou seja, do recurso didático adequado e aplicado coerentemente. Então, cabe a professores e professoras atribuir vivacidade ao material didático escolhido para se transmitir um determinado conteúdo, tornando possível a ação o ensino-aprendizado mais facilitado, pois o material didático aproximará o aluno da realidade concreta.

Assim, a dimensão lúdica das aulas despertou a curiosidade e a motivação dos alunos da turma do 6º ano do Ensino Fundamental Nível II com o tema envolvendo o jogo de Hanói como ferramenta mediadora no ensino de potência. Com a Torre de Hanói em mãos, as equipes puderam buscar expressões matemáticas que determinassem a mínima de movimentos necessários para transferência de discos. A partir das descobertas deles procedeu-se à introdução do conceito de Potenciação com a matemática, com discussões acerca de sua utilização para demonstração de afirmações matemáticas. Os grupos puderam trocar experiências e dialogaram acerca das estratégias que condicionavam a realização do jogo Torre de Hanói. Pôde-se notar que a proposta de apresentação do conteúdo de Indução Matemática utilizando material concreto favorece o raciocínio dos alunos.

Pode-se dizer que o processo de Indução explicado na pesquisa representou uma oportunidade para os estudantes desenvolverem habilidades matemáticas importantes para o prosseguimento dos estudos. Com a pesquisa os participantes puderam conhecer os processos de generalização existentes, bem como compreender um importante método utilizado pela Matemática para verificar se é possível estabelecer a generalização de afirmações tomadas como verdadeiras no ramo das Ciências Exatas.

Contudo, os objetivos delineados foram atingidos. Com a aplicação da Torre de Hanói foi possível apresentar de forma concreta as potencialidades da utilização deste jogo para os diversos níveis de ensino, sobretudo no Ensino Fundamental Nível II. A ludicidade contribuiu para tornar as aulas mais agradáveis e satisfatórias por proporcionar tentativas e descobertas sobre a transferência de peças.

Por fim, pode-se considerar a relevância da realização desta pesquisa. O estudo desenvolvido servirá de embasamento teórico para outros pesquisadores que tratem do mesmo tema de interesse. Esta investigação contribuirá para expandir as fontes disponíveis para tratamento do tema que foi abordado durante esta pesquisa no Ensino Fundamental Nível II, contribuindo assim para preparar os estudantes para lidarem com a perspectiva de infinito em Matemática.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conhecimento matemático é fundamental para as diversas situações, desde as mais simples tarefas do nosso cotidiano até o desenvolvimento das mais complexas tecnologias. A sua aplicabilidade é notável em vários contextos, além de possuir relação com as demais áreas do conhecimento. Porém, ainda existe uma desconexão com a matemática ensinada na escola e a matemática da “vida”. Nesse sentido, visando à mudança nessa situação, o professor de matemática necessita buscar por formas, estratégias e encaminhamentos que aproximem a matemática escolar de suas reais aplicações além das inúmeras listas de exercício, e sem falar em uma nova matemática que já vem surgindo no dia a dia, e é conhecida hoje no século XXI como a matemática do raciocínio lógico.

Esse estudo permitiu verificar, que o uso dos jogos no ensino da matemática, podem aproximar os conceitos matemáticos ensinados em sala de aula às situações que envolvem a matemática fora do contexto escolar. A investigação realizada foi desenvolvida com alunos do 6º ano e sabe-se que na faixa etária que esses alunos se encontram as atividades de descontração e competição são muito procuradas. Os jogos tecnológicos se evidenciam nessa busca, porém o lúdico, as regras e as características despertadas ao desenvolver uma atividade com jogos estão na essência do jogar, seja o jogo confeccionado de um material simples ou com a mais atual da tecnologia digital em seu cotidiano.

2725

O jogo Torre de Hanói, se mostrou uma excelente ferramenta auxiliadora, na aplicação e compreensão do conteúdo de potenciação para o 6º ano do Ensino Fundamental Nível II. Os alunos demonstraram interesse e satisfação em estar em atividade com o jogo à medida que desenvolviam estratégias para solucionar os problemas que foram propostos durante a intervenção. Ressaltamos a participação ativa desses alunos desde a confecção de seus próprios jogos até a generalização da fórmula que permite calcular o número mínimo de movimentos para uma quantidade  $n$  de discos, que foram abordados na realização desta atividade com os alunos desta turma.

Constatamos ainda que o jogo Torre de Hanói foi eficiente ao que esse estudo se propôs, os objetivos foram alcançados, certamente o êxito na intervenção pedagógica aconteceu devido ao planejamento das atividades. Grandó (1995), Ribeiro (2012) e Fiorentini e Miorim (1990), concordam no que diz respeito ao planejamento e a escolha do material ou jogo utilizado nas aulas de matemática, esses autores ressaltam que as aulas envolvendo jogos devem ser pensadas e planejadas para que o jogo não seja uma atividade desconectada

da aprendizagem, haja vista que o uso da internet hoje no século XXI vem acompanhando a educação em todos os níveis de ensino de nosso país, e também, do mundo em geral.

A torre de Hanói propicia o desenvolvimento do espírito investigador, que pode ainda estimular o interesse e o raciocínio lógico, valorizando a autoestima do aluno na busca de soluções para os desafios do seu dia-a-dia.

A inclusão da torre de Hanói no processo de ensino aprendizagem pode ser mais uma ferramenta no estudo da função exponencial, onde constata-se a relação entre o número de discos e de movimentos em uma função exponencial. Verificou-se ao final que a aplicação da torre de Hanói possibilitou aos alunos uma melhor compreensão do conteúdo, fato que se torna gratificante ao se poder constatar que a pesquisa pôde contribuir para a aprendizagem desses alunos de maneira mais efetiva, ao utilizarem jogos matemáticos em sala de aula.

Podemos assim justificar a importância da inclusão de jogos na aula observando seu caráter didático efetivo, como a possibilidade de promover as relações sociais, a contribuição.

Por fim, pode-se considerar a relevância da realização desta pesquisa. O estudo desenvolvido poderá servir de embasamento teórico para outros pesquisadores que tratem do mesmo tema de interesse. Esta investigação contribuirá para expandir as fontes disponíveis para tratamento do tema de Indução Matemática no ensino fundamental II contribuindo assim para preparar os estudantes para lidarem com a perspectiva de infinito em Matemática.

2726

## REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Matemática. Ensino fundamental. Terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

DAMIANI, Magda Floriana; ROCHEORT, Renato Siqueira; CASTRO, Rafael Fonseca de; DARIZ, Marion Rodrigues; PINHEIRO, Silva Siqueira. **Discutindo pesquisa do tipo intervenção pedagógica**. Cadernos de Educação – Faculdade de Educação, UFPeL, n.45, 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M, A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

GONÇALVES, Alex O. **A Torre de Hanói em Sala de Aula**. Revista do Professor de Matemática, nº 63, p. 16-18. São

GIOVANNI J.R., GIOVANNI J.R.J, CASTRUCCI B, **A Conquista da Matemática**. São Paulo, FTD, 2015.

GRANDO, R. C. **O Jogo e suas Possibilidades metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática**. Campinas, SP,1995. 175p. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação, UNICAMP

KISHIMOTO, Tizuko M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 2017.

MACHADO, N. J. **Matemática e Educação: alegorias, tecnologias e temas afins**. São Paulo: Cortez, 1992. Coleção Questões da Nossa Época, n. 2, p. 40 e 41.

MOREIRA, D. A. **O método fenomenológico na pesquisa**. São Paulo: Pioneira Thomson, 2002.

MORETTO, Vasco Pedro. **Planejamento: planejando a educação para o desenvolvimento de competências**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

OLIVEIRA, Sandra Alves de. **O lúdico como motivação nas aulas de Matemática**. Pedagoga e especialista em Matemática e Estatística, professora no Departamento de Educação de Guanambi, BA, Uneb. Endereço eletrônico: soliveira4@hotmail.com Artigo publicado na edição nº 377, jornal Mundo Jovem, junho de 2007,

2727

RIBEIRO, D, F. **Jogos e modelagem na educação matemática**. Curitiba: InterSaberes, 2012.

SILVEIRA, E.; MIOLA, R. J. **Professor -Pesquisador em Educação Matemática**. Curitiba: Ibplex, 2008.

SAVIANI, D.(1991) **Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações**. 2ª ed. São Paulo, Cortez/Autores Associados.

TAHAN, Malba. **A matemática na lenda e na história**. Rio de Janeiro: Bloch Editores, 1974, p. 137-140

VIGINHESKI, Lúcia Virginia Mamcasz. **Uma abordagem para o ensino de produtos notáveis para uma classe inclusiva: o caso de uma aluna com deficiência visual**.